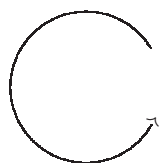


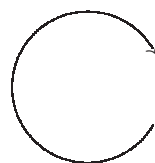
3 線形写像

まず、角について復習する。

- 反時計まわりを基本とする。

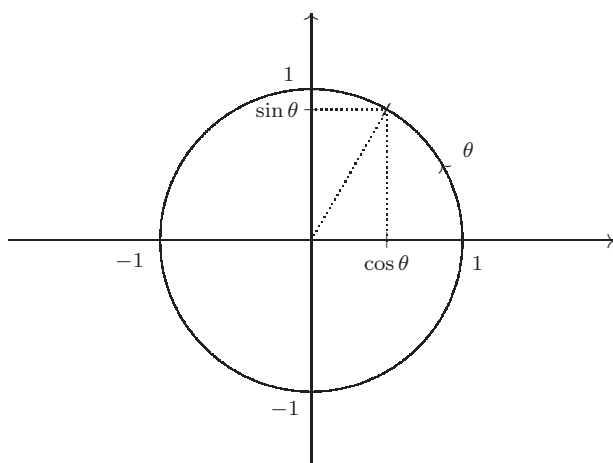


反時計まわり＝基本
counter-clockwise



時計まわり
clockwise

- 角を測るときはラジアンを単位とする。



$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

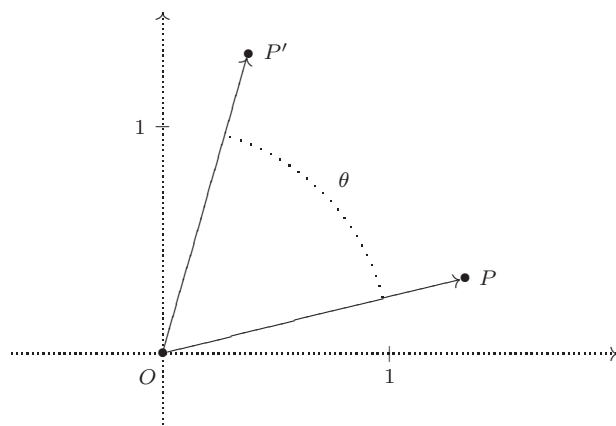
$$\sin \pi = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

問題 1. 例として、次のように定義された写像を考える。



$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{F_\theta} \mathbb{R}^2 \\ \overrightarrow{OP} &\mapsto \overrightarrow{OP'} \end{aligned}$$

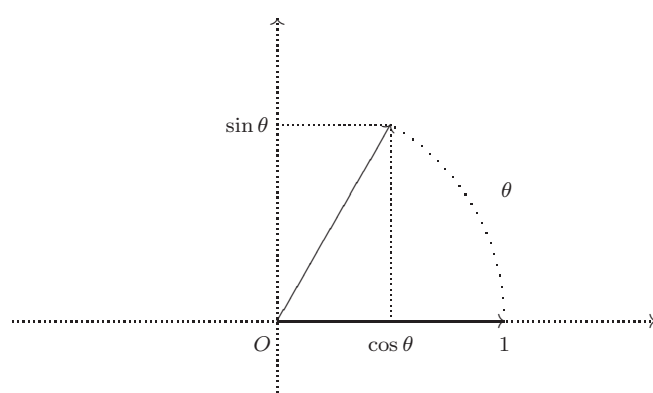
ここで、 $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ は平面ベクトルのなす集合であり、 F_θ はベクトル $\overrightarrow{OP}$ を、
 原点 O を中心として θ 回転させたベクトル $\overrightarrow{OP'}$ に移すルールである。これに対して、

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

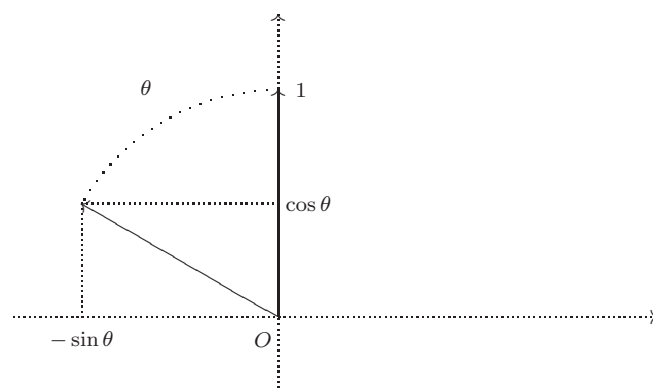
とすると、

$$F_\theta(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

はどう表されるか？



$$\Rightarrow F_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow F_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

写像 $F_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が次の性質 (1)–(2) をもつことが分かったら問題が解ける。

(1) スカラー倍がスカラー倍になっている。

$$F_\theta(s\mathbf{x}) = sF_\theta(\mathbf{x})$$

(2) ベクトル和がベクトル和になっている。

$$F_\theta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = F_\theta(\mathbf{x}) + F_\theta(\mathbf{y})$$

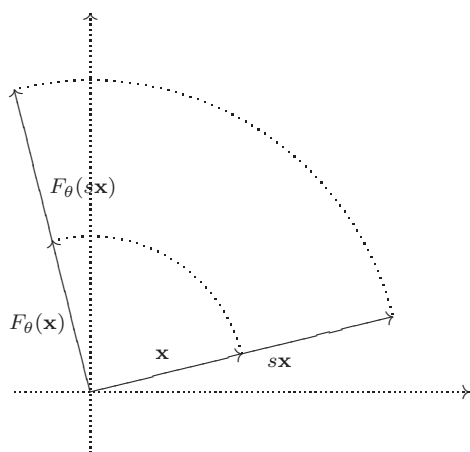
性質 (1)–(2) を満たす写像は、**線形写像**と呼ばれる。この性質により、

$$\begin{aligned} F_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= F_\theta \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \stackrel{(2)}{=} F_\theta \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + F_\theta \left(y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} x F_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y F_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

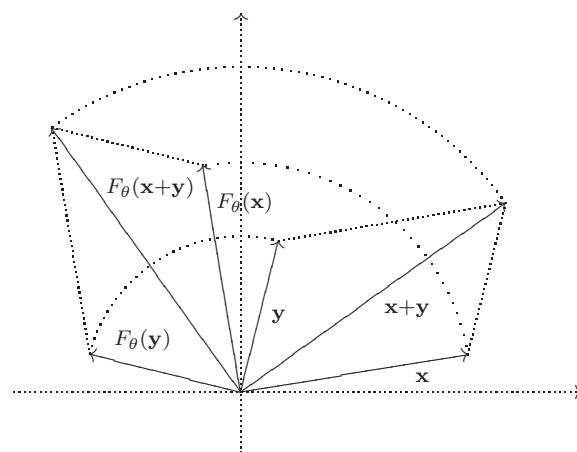
が成り立つ。すなわち、回転 $F_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は、

$$F_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表される。性質 (1)–(2) は、次の図式から成り立つことが分かる。



$$\Rightarrow F_\theta(s\mathbf{x}) = sF_\theta(\mathbf{x})$$



$$\Rightarrow F_\theta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = F_\theta(\mathbf{x}) + F_\theta(\mathbf{y})$$

命題 2. 任意の線形写像 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は、次のように表される。

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ただし、

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

証明. 線形写像の定義より、

$$\begin{aligned}
 F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= F \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \stackrel{(2)}{=} F \begin{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{(1)}{=} xF \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yF \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

である。よって、命題は示された。 □

問題 3. ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を角 β 回転させて、角 α 回転させるとどうなるか？まず、問題 1 より、角 β 回転させたベクトルは、

$$F_{\beta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。同様に、そのベクトルの角 α 回転させたベクトルは、

$$F_{\alpha}(F_{\beta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。一方、

$$F_{\alpha}(F_{\beta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = F_{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

であることが成り立つ。すなわち、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

であることが分かる。

命題 4. 線形写像 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を次のように表す。

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このとき、合成写像 $F \circ G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が次のように表される。

$$(F \circ G) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

証明. 合成写像の定義より、

$$(F \circ G) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \left(G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

なので、命題 2 によって、

$$(F \circ G) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であることが分かる。 □

注 5. 一般的に、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

は異なる。例として、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

である。