

## 6 連立 1 次方程式

次の連立 1 次方程式を考える。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

行列を用い、この連立 1 次方程式は、次の行列の方程式でも表される。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

すなわち、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とすると、方程式 (2) は、次のようにも表される。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2)$$

ここで、行列  $A$  は、連立 1 次方程式 (1) の**係数行列** (coefficient matrix) と呼ばれる。係数行列  $A$  が  $m \times n$  型の行列であることと、元の方程式 (1) が  $m$  個の方程式からなる  $n$  変数の連立 1 次方程式であることは、同値である。次の  $m \times (n+1)$  型の行列は、方程式 (1) と (2) の**拡大係数行列** (augmented coefficient matrix) と呼ばれる。

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

例 3. 次の連立 1 次方程式を考える。

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_1 - 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

この連立 1 次方程式は、次の行列の方程式でも表される。

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

以上の方程式の拡大係数行列は、次の  $3 \times 5$  型の行列となる。

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

係数行列  $A$  を、 $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$  と列ベクトルに分割すると

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

となる。よって、連立 1 次方程式 (1) は、

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \tag{4}$$

となる  $x_1, x_2, \dots, x_n$  を求めることと同等である。

**定義 5.**  $m$  次列ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  が与えられたとき、次のような  $m$  次列ベクトルが、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  の **1 次結合** または **線形結合** (linear combination) と呼ばれる。

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$$

ここで、 $c_1, \dots, c_n$  は、任意の実数である。

例 6. 任意の 2 次元ベクトル  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  は、次のように列ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  の 1 次結合で表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 7. 例 3 における連立 1 次方程式は、次のようにも表される。

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

問題 8. 式の加減、入れ替え等を行うことによって、次の連立 1 次方程式を解いてみる。

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \\ \text{(II)} \quad \begin{cases} -y = -2 & \text{①} + \text{②} \times (-2) \\ x + 2y = 5 \end{cases} \\ \text{(III)} \quad \begin{cases} -y = -2 \\ x = 1 & \text{②} + \text{①} \times 2 \end{cases} \\ \text{(IV)} \quad \begin{cases} x = 1 \\ -y = -2 & \text{①と②を入れ替えた} \end{cases} \\ \text{(V)} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 & \text{②} \times (-1) \end{cases} \end{array}$$

ここで ① と ② その 1 つ前の連立方程式の第 1 式と第 2 式を意味する。

問題 8 で行った変形は次の 3 つである。これらは連立 1 次方程式の**基本変形**と呼ばれる。

- (1) 1 つの式を何倍か ( $\neq 0$  倍) する。
- (2) 2 つの式を入れ替える。
- (3) 1 の式に他の式の何倍かを加える。

基本変形(1)–(3)は可逆的であるため、連立1次方程式の解集合を変更しない。以上のように基本変形(1)–(3)を用いて連立1次方程式を解く方法は**掃き出し法** (Gaussian elimination) と呼ばれる。

**問題 9.** 連立1次方程式の拡大行列を用い、問題8をもう一回考える。

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} & \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \quad \text{①} + \text{②} \times (-2) \\
 \text{(III)} & \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{②} + \text{①} \times 2 \\
 \text{(IV)} & \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \quad \text{①と②を入れ替えた} \\
 \text{(V)} & \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \text{②} \times (-1)
 \end{array}$$

ここで①と②その1つ前の拡大行列の第1行と第2行を意味する。

**定義 10.** 行列の次の3つの変形は、**行基本変形** (elementary row operations) と呼ばれる。

- (1) 1つの行を何倍か ( $\neq 0$  倍) する。
- (2) 2つの行を入れ替える。
- (3) 1の行に他の行の何倍かを加える。

**例 11.** 次の連立1次方程式を、拡大係数行列の基本変形を用いて解いてみる。

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

拡大係数行列とその基本変形を次のように略記して縦に書くと分かりやすい。①、②、③は、その1つ上の行列の第1行、第2行、第3行をする。

2	3	-1	-3	
-1	2	2	1	
1	1	-1	-2	
0	1	1	1	① + ③ × (-2)
0	3	1	-1	② + ③
1	1	-1	-2	
1	1	-1	-2	
0	3	1	-1	① と ③ の入れ替え
0	1	1	1	
1	0	-2	-3	① + ③ × (-1)
0	0	-2	-4	② + ③ × (-3)
0	1	1	1	
1	0	-2	-3	
0	0	1	2	② × (-1/2)
0	1	1	1	
1	0	-2	-3	
0	1	1	1	② と ③ の入れ替え
0	0	1	2	
1	0	0	1	① + ③ × 3
0	1	0	-1	② + ③ × (-1)
0	0	1	2	

これを連立1次方程式に戻して

$$\begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & -1 \\ z & = & 2 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad (\text{答}) \quad \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & -1 \\ z & = & 2 \end{cases}$$

を得る。