

7 行列の簡約化

定義 1. 行列の零ベクトルでない行ベクトルの 0 でない左から最初の成分はその行の**主成分** (pivot) と呼ばれる。

例 2. 次の行列 A の第 1 行の主成分は 3、第 2 行の主成分は 1、第 4 行の主成分は 2 である。第 3 行は零ベクトルなので、主成分はない。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

定義 3. 次の性質を満たす行列は**簡約な行列** (reduced row echelon matrix) と呼ばれる。

- (I) 行ベクトルのうちに零ベクトルがあれば、それ以下の行ベクトルも零ベクトルである。
- (II) 零ベクトルでない行ベクトルの主成分は 1 である。
- (III) 第 i 行の主成分を a_{ij_i} とすると、 $j_1 < j_2 < j_3 < \dots$ となる。
- (IV) 各行の主成分を含む列の他の成分は全て 0 である。

例 4. (簡約な行列の例)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 5. (簡約でない行列の例)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 6. (i) 行列 A に行基本変形を繰り返すことにより、簡約な行列 B ができる。

(ii) 簡約な行列 B と C は、行列 A に行基本変形を繰り返して得られたものであれば、必ず $B = C$ である。

証明. 後期に示す。 □

定義 7. 行列 A に行基本変形を繰り返した簡約な行列 B は、元の行列 A の**簡約化** (reduced row echelon form) とよばれる。

例 8. 例 2 で考えた行列 A を簡約化する。

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} && \text{①} \times (1/3) \\
 &\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{④} \times (1/2) \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} \text{① と ② を入れ替えた} \\ \text{③ と ④ を入れ替えた} \end{array} \\
 B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{①} + \text{③} \times (-2)
 \end{aligned}$$

定義 9. 行列 A を簡約化した行列 B の主成分の個数は、 A の**階数** (rank) とよばれ、 $\text{rank}(A)$ と書かれる。

注 10. (1) 行列 A の階数は、簡約化 B の零ベクトルでない行の個数とも定義される。

(2) 一般的に、行列 A の主成分の個数は、 A の階数以上である。

例 11. 例 4 における行列の階数を計算する。

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= 2, & \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} &= 3 \\ \text{rank} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 3 \end{pmatrix} &= 3, & \text{rank} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} &= 3 \end{aligned}$$

例 12. 例 5 における行列の階数を計算する。

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{2} & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 3 \end{pmatrix} &= \text{rank} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -9 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 3 \end{pmatrix} &= 3 \\ \text{rank} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} &= \text{rank} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= 2 \end{aligned}$$

命題 13. $m \times n$ 型の行列 A に対して、 $\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$ である。

証明. 行列 A を簡約化した行列 B も $m \times n$ 型の行列であり、定義 9 より、

$$\text{rank}(A) = B \text{ の主成分を含む行の個数} = B \text{ の主成分を含む列の個数}$$

である。よって、

$$\text{rank}(A) \leq B \text{ の行の個数} = m$$

$$\text{rank}(A) \leq B \text{ の列の個数} = n$$

であることが分かる。

□

定義 14. 次の m 次の正方行列は、**基本行列** (elementary matrices) と呼ばれる。

- (1) 単位行列 E の第 i 行を s 倍 ($s \neq 0$) した行列 $P_i(s)$
- (2) 単位行列 E の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列 $T_{i,j}$
- (3) 単位行列 E の第 i 行に第 j 行の s 倍を加えた行列 $E_{i,j}(s)$

例 15. (3 次の基本変形の例)

$$P_3(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}, \quad T_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,3}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

命題 16. A は $m \times n$ 型の行列とする。

- (1) $P_i(s)A$ は、行列 A の第 i 行を s 倍した行列と等しい。
- (2) $T_{i,j}A$ は、行列 A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列と等しい。
- (3) $E_{i,j}(s)A$ は、行列 A の第 i 行に第 j 行の s 倍を加えた行列と等しい。

証明. 定義から直ちに成り立つ。 □

例 17. (基本行列とその行基本変形) A は 3×2 型の行列とする。

$$\begin{aligned} P_3(s)A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ sa_{31} & sa_{32} \end{pmatrix} \\ T_{2,3}A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ E_{2,3}(s)A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + sa_{31} & a_{22} + sa_{32} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

命題 18. 基本行列は可逆行列である。具体的には、

$$P_i(s)P_i(1/s) = E = P_i(1/s)P_i(s)$$

$$T_{i,j}T_{i,j} = E$$

$$E_{i,j}(s)E_{i,j}(-s) = E = E_{i,j}(-s)E_{i,j}(s)$$

である。

例 19. 前回の例 11 では、次の拡大行列 A の簡約化 B を計算した。

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

基本行列を用いて、その計算は、次のようにも表される。

$$B = E_{2,3}(-1)E_{1,3}(3)T_{2,3}P_2(-1/2)E_{2,3}(-3)E_{1,3}(-1)T_{1,3}E_{2,3}(1)E_{1,3}(-2)A$$