8　連立 1 次方程式を解く

前回勉強した簡約化を用いて、連立 1 次方程式を解く。まず、二つの例を考えてみる。

例 1. 次の連立 1 次方程式を解いてみる。

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & & & - & x_3 & & & - & 2x_5 & = & 1 \\
 & & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & -2 \\
-x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 3 \\
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & - & 3x_5 & = & 1
\end{array}
\right. \tag{1}
$$

連立 1 次方程式の拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化する。

$$
(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\
2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
③ + ① \\
④ + ① \times (-2)
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
\\
④ + ② \times (-1)
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
① + ④ \times (-1) \\
② + ④ \times 2 \\
③ + ④ \times (-4) \\
\\
\end{array}
$$

よって、連立 1 次方程式 (1) の解集合と次の連立 1 次方程式 (1′) の解集合は等しい。

$$(1')\qquad \begin{cases} x_1 \quad - x_3 \quad - 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 \quad + x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

しかし、$0 \neq 1$ ため、連立 1 次方程式 (1′) は、解を持たない。

例 2. 次の連立 1 次方程式を考えてみる。

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad + 3x_4 \quad = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$$

連立 1 次方程式の拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化する。

$$\begin{aligned}
(A \mid \mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right) \\
&\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ ② + ① \times (-1) \\ ③ + ① \times (-2) \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ \\ ③ + ② \times (-1) \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ ② + ③ \times (-1) \\ \\ \end{array}
\end{aligned}$$

よって、連立 1 次方程式 (2) の解集合は、次の連立 1 次方程式 (2′) の解集合と等しい。

$$(2')\qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad + 3x_4 \quad = 2 \\ x_3 - x_4 \quad = -1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

連立 1 次方程式 (2′) は解を持ち、次のように表される。主成分を含まない列に対応する変数 x_2, x_4 の値を任意に定めると、主成分を含む列と対応する変数 x_1, x_3, x_5 は、一意的に決まる。すなわち、$x_2 = c_1$ と $x_4 = c_2$ とおくと、方程式 (2) の解集合は、次のように表される。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2c_1-3c_2 \\ c_1 \\ -1+c_2 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

連立 1 次方程式 (1) において、簡約化した拡大係数行列の最も右の列は、主成分を含むため、解を持たない。連立 1 次方程式 (2) において、簡約化した拡大係数行列の最も右の列は、主成分を含まないため、解を持つ。

階数の定義より、次の性質 (i)–(iv) に対して、(i) と (ii) は同値、(iii) と (iv) は同値である。

(i) 拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化した行列の最も右の列は、主成分を含む。

(ii) $\operatorname{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \operatorname{rank}(A) + 1$

(iii) 拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化した行列の最も右の列は、主成分を含まな。

(iv) $\operatorname{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \operatorname{rank}(A)$

定理 **3.** 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に対して、次の性質 (i)–(ii) は同値である。

(i) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、解を持つ。

(ii) 係数行列 A の階数 $\operatorname{rank}(A)$ と拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ の階数 $\operatorname{rank}(A \mid \mathbf{b})$ は等しい。

証明. A を $m \times n$ 行列とする。

まず、(ii) を仮定し、(i) を示す。$(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化した行列 $(C \mid \mathbf{d})$ の主成分を含む列と主成分を含まない列を、それぞれ $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ と $k_1 < k_2 < \cdots < k_{s+1}$ とする。このとき、$r + s + 1 = n + 1$ である。(ii) より、$(C \mid \mathbf{d})$ の最も右の列 $\mathbf{d}$ は、主成分を含まないため、

$k_{s+1} = n + 1$ が分かる。さらに、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合と次の連立 1 次方程式の解集合は等しい。

$$\begin{cases} x_{j_1} = d_1 - c_{1,k_1}x_{k_1} - c_{1,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{1,k_s}x_{k_s} \\ x_{j_2} = d_2 - c_{2,k_1}x_{k_1} - c_{2,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{2,k_s}x_{k_s} \\ \qquad \vdots \\ x_{j_r} = d_r - c_{r,k_1}x_{k_1} - c_{r,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{r,k_s}x_{k_s} \end{cases}$$

よって、変数 $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_s}$ の値を任意に定めると、変数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ は、一意的に決まる。特に、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、解を持つことが分かるため、(i) が成り立つ。

逆に、(ii) が満たされていないとき、拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化した行列 $(C \mid \mathbf{d})$ の最も右の列 $\mathbf{d}$ は、主成分を含むことが分かる。$(C \mid \mathbf{d})$ の主成分を含む列と主成分を含まない列を、それぞれ $j_1 < j_2 < \cdots < j_{r+1}$ と $k_1 < k_2 < \cdots < k_s$ とすると、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合は、次の連立 1 次方程式の解集合と等しいことを得る。

$$\begin{cases} x_{j_1} = d_1 - c_{1,k_1}x_{k_1} - c_{1,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{1,k_s}x_{k_s} \\ x_{j_2} = d_2 - c_{2,k_1}x_{k_1} - c_{2,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{2,k_s}x_{k_s} \\ \qquad \vdots \\ x_{j_r} = d_r - c_{r,k_1}x_{k_1} - c_{r,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{r,k_s}x_{k_s} \\ \quad 1 = 0 \end{cases}$$

しかし、この連立 1 次方程式は、解を持たないため、(i) も満たされていないことが分かる。これで、定理を示した。 $\square$

補遺 4. m 個の方程式からなる n 変数の連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ とその $m \times (n+1)$ 型の拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ において、

$$\operatorname{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \operatorname{rank}(A)$$

を仮定し、その階数を r とする。

(i) $r = n$ のとき、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、ただ一つの解を持つ。

(i) $r < n$ のとき、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\} \subset \mathbb{R}^n$$

は、$n - r$ 個のパラメーター $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ で表される。

証明. 拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化した行列を $(C \mid \mathbf{d})$ とする。

(i) 仮定 $r = n$ より、$C = E_n$ が分かる。従って、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合は、連立 1 次方程式 $E_n\mathbf{x} = \mathbf{d}$ の解集合と等しいため、$\mathbf{x} = \mathbf{d}$ はただ一つの解であることが分かる。

(ii) 行列 C の主成分を含まない列と対応する変数 $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_{n-r}}$ の値を任意に定めると、主成分を含む列と対応する変数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ は、一意的に決まる。 □

例 5. 次の連立 1 次方程式を解いてみる。

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化する。

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \qquad ② + ① \times (-1)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \qquad ① + ② \times 2$$

これを見ると、$\mathrm{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \mathrm{rank}(A) = 2$ が分かる。よって、補遺 4 の (ii) より、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合は、$n - r = 4 - 2 = 2$ 個のパラメーター c_1, c_2 で表される。簡約化した拡大係数行列と対応する連立 1 次方程式は、次のように得られる。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = -7 \\ x_2 + x_3 - x_4 = -5 \end{cases}$$

よって、解集合 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ は、次のように表される。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 - 2c_1 - c_2 \\ -5 - c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2)$$