

9 可逆行列

以下、正方行列を考える。

定義 1. 正方行列 A をおいておく。

(1) $AC = E_n = CA$ を満たす正方行列 C は、 A の**逆行列**と呼ばれ、 A^{-1} と書かれる。

(2) A を逆行列を持つとき、**可逆行列**あるいは**正則行列**と呼ばれる。

注 2. (i) 可逆行列 A^{-1} は、一意である。なぜなら、 $AC = E_n = CA$ と $AD = E_n = DA$ のとき、

$$C = CE_n = C(AD) = (CA)D = E_n D = D$$

が成り立つ。

(ii) A と B は可逆行列であるとき、 AB も可逆行列で、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

である。

例 3. 基本行列 $P_i(s)$ 、 $T_{i,j}$ 、 $E_{i,j}(s)$ は、可逆行列で、

$$P_i(s)^{-1} = P_i(1/s)$$

$$T_{i,j}^{-1} = T_{i,j}$$

$$E_{i,j}(s)^{-1} = E_{i,j}(-s)$$

である。

以下、 $AC = E_n$ を満たす正方行列 C に対して、必ず $CA = E_n$ であることを示す。それを示せるために、まず様々な補題を示す。

補題 4. n 次正方行列 A に対して、次の性質は同値である。

(i) $AC = E_n$ を満たす n 次正方行列 C が存在する。

(ii) 任意の n 次列ベクトル $\mathbf{b}$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は解を持つ。

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) : $\mathbf{x} = C\mathbf{b}$ とすると、

$$A\mathbf{x} = A(C\mathbf{b}) = (AC)\mathbf{b} = E_n\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

が成り立つ。

(ii) $\Rightarrow$ (i) : n 次列ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ を、

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、仮定より、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1, A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2, \dots, A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$ は、解を持つ。それらを、各々 $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1, \mathbf{x} = \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{x} = \mathbf{c}_n$ とし、

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}$$

とすると、 C は n 次正方行列で、

$$AC = A \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{c}_1 & A\mathbf{c}_2 & \dots & A\mathbf{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = E_n$$

を満たす。これで、補題を示した。 $\square$

補遺 5. n 次正方行列 A において、 $AC = E_n$ と $AD = E_n$ を満たす正方行列 C と D に対して、必ず $C = D$ である。

証明. C を、 $AC = E_n$ を満たす正方行列とする。補題 4 より、任意の列ベクトル $\mathbf{b}$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、解を持つ。よって、任意の列ベクトル $\mathbf{b}$ に対して、

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A \mid \mathbf{b})$$

が分かる。このとき、 $\text{rank}(A) = n$ である。なぜなら、 $\text{rank}(A) = r < n$ であれば、 A を簡約化した行列 $B = PA$ の第 r 行以下の行は、全てゼロであるため、 $\mathbf{b} = P^{-1}\mathbf{e}_{r+1}$ とすると、

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = r \neq r + 1 = \text{rank}(B \mid \mathbf{e}_{r+1}) = \text{rank}(A \mid \mathbf{b})$$

が分かる。従って、前回示した補遺 4 より、任意の列ベクトル $\mathbf{b}$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、ただ一つの解を持つ。特に、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1, A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2, \dots, A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$ は、各々ただ一つの解 $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{x} = \mathbf{c}_n$ を持つ。よって、 $AC = E_n$ を満たす正方行列 $C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}$ に対しても、ただ一つが存在することを得る。 $\square$

命題 6. n 次正方行列 A は、 $\text{rank}(A) = n$ を満たすとき、 $n \times 2n$ 行列 $(A \mid E_n)$ の簡約化を $(E_n \mid C)$ とすると、 n 次正方行列 C が、 $AC = E_n$ を満たす。

証明. なぜなら、 C を $(\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \cdots \ \mathbf{c}_n)$ と書くと、任意の $j = 1, 2, \dots, n$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ と $\mathbf{x} = \mathbf{c}_j$ の解集合は等しいため、 $AC = E_n$ が成り立つ。 $\square$

定理 7. n 次正方行列 A に対して、次の性質 (i)–(ii) は、同値である。

(i) A は、可逆行列である。

(ii) $AC = E_n$ を満たす正方行列 C が存在する。

このとき、 $A^{-1} = C$ である。

証明. (ii) を仮定し、(i) を示す。すなわち、 $AC = E_n$ を満たす正方行列 C において、 $CA = E_n$ であることを示せがよい。仮定より、 $\text{rank}(A) = n$ が分かるため、 A を簡約化した行列は、 E_n となることを得る。よって、

$$C_N C_{N-1} \cdots C_2 C_1 A = E_n$$

を満たす基本行列 $C_1, \dots, C_N$ が存在することが分かる。例 3 より、任意の基本行列は可逆行列であるため、

$$\begin{aligned} A &= C_1^{-1} C_2^{-1} \cdots C_{N-1}^{-1} C_N^{-1} C_N C_{N-1} \cdots C_2 C_1 A \\ &= C_1^{-1} C_2^{-1} \cdots C_{N-1}^{-1} C_N^{-1} E_n \\ &= C_1^{-1} C_2^{-1} \cdots C_{N-1}^{-1} C_N^{-1} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$AC_N C_{N-1} \cdots C_2 C_1 = C_1^{-1} C_2^{-1} \cdots C_{N-1}^{-1} C_N^{-1} C_N C_{N-1} \cdots C_2 C_1 = E_n$$

を得るため、補遺 5 より、

$$C = C_N C_{N-1} \cdots C_2 C_1$$

が分かる。今、 $CA = E_n$ を示したため、(i) が成り立つ。

最後に、(i) を仮定すると、(ii) は自明なので、定理を示した。 $\square$

例 8. 定理 7 と命題 6 を用い、次の正方行列 A の逆行列 A^{-1} を計算する。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

行列 $(A \mid E_3)$ を簡約化する。

$$\begin{aligned} (A \mid E_3) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-3) \\ \textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-2) \end{array} \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \textcircled{3} + \textcircled{2} \times (-2) \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \textcircled{2} \times (1/2) \\ \textcircled{3} \times (-1/3) \end{array} \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \textcircled{2} + \textcircled{3} \times (-1) \\ (E_3 \mid A^{-1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \textcircled{1} + \textcircled{2} \end{aligned}$$

よって、 A の逆行列は、次の行列となる。

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$