

練習問題その 1 (解答)

問題 1. (1) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$, $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$ は単射である。

(2) $g: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$, $g(1) = g(2) = g(3) = a$ は単射でない写像である。

(3) $h: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, $h(a) = h(b) = 1$, $h(c) = 2$, $h(d) = 3$ は全射である。

(4) $i: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, $i(a) = i(b) = 1$, $i(c) = i(d) = 2$ は全射でない写像である。

問題 2. (i) と (ii) が次のように成り立つ。

$$\begin{aligned} f(U \cup V) &= \{f(a) \mid a \in U \cup V\} \\ &= \{f(a) \mid a \in U \text{ または } a \in V\} \\ &= \{f(a_1) \mid a_1 \in U\} \cup \{f(a_2) \mid a_2 \in V\} \\ &= f(U) \cup f(V) \\ f(U \cap V) &= \{f(a) \mid a \in U \cap V\} \\ &= \{f(a) \mid a \in U \text{ かつ } a \in V\} \\ &\subset \{f(a_1) \mid a_1 \in U\} \cap \{f(a_2) \mid a_2 \in V\} \\ &= f(U) \cap f(V) \end{aligned}$$

問題 3. 写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ において、合成写像 $g \circ f: A \rightarrow C$ は全単射であることは仮定された。

(1) 必ずしも $f: A \rightarrow B$ は全射ではない。例として、 $f: \{1\} \rightarrow \{1, 2\}$ と $g: \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$ それぞれ $f(1) = 1$ と $g: \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$, $g(1) = g(2) = 1$ で定義すると $g \circ f: \{1\} \rightarrow \{1\}$ は全単射でも $f: \{1\} \rightarrow \{1, 2\}$ は全射ではない。しかし、必ず $f: A \rightarrow B$ は単射である。なぜなら、合成写像 $g \circ f: A \rightarrow C$ は単射であるため、 $a_1 \neq a_2$ のとき

$$g(f(a_1)) = (g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2) = g(f(a_2))$$

が分かる。よって、 $f(a_1) \neq f(a_2)$ が分かる。すなわち、 $f: A \rightarrow B$ は単射である。

(2) 必ず $g: B \rightarrow C$ は全射である。なぜなら、 $(g \circ f)(A) = C$ であるため、

$$C = (g \circ f)(A) = g(f(A)) \subset g(B) \subset C$$

を得る。よって、 $g(B) = C$ が成り立つ。最後に、以上の例をもう 1 回考えると、必ずしも $g: B \rightarrow C$ は単射ではないことが分かる。

問題 4. 次のように定義された写像 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1)$ は全単射である。

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-(i+1)} & (x = 2^{-i}, \text{ ある } i \geq 0) \\ x & (\text{それ以外}) \end{cases}$$