

練習問題その10 (解答)

問題 1. (1) 第1行で展開すると、

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = +4 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 15 = 60$$

を得る。

(2) 第1行で展開し、第1列で展開し、第1行で展開し、第1行で展開すると、

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot (-8) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 13 & -2 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-8) \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot (-8) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2 = 192 \end{aligned}$$

を得る。

(3) 同様に、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -19$$

が分かる。

問題 2. $n = 1$ のとき、 $\det(A) = a_{11}$ は自明なので、 $n = r - 1$ のときは正しいと仮定し、 $n = r$ のときを示せばよい。第1列で展開すると、 $\det(A) = a_{11} \det(A_{11})$ が分かる。なぜなら、任意の $i > 1$ に対して、 $a_{i1} = 0$ である。さらに、 A_{11} は $r - 1$ 次の上三角行列であるた

め、帰納法の仮定より、 $\det(A_{11}) = a_{22}a_{33} \dots a_{rr}$ が分かる。よって、

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{rr}$$

が成り立つ。

問題 3. $P_i(s)$ は、単位行列 E_n の第 i 行を s 倍とした行列である。特に、 $P_i(s)$ は上三角行列なので、問題 2 より、 $\det(P_i(s)) = s$ を得る。

$T_{i,j}$ は、単位行列 E_n の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列である。 $T_{i,j} = T_{j,i}$ ため、 $i < j$ を仮定すればよい。まず、第 i 行で展開し、それから、第 $j-1$ 行で展開すると、

$$\det(T_{i,j}) = (-1)^{i+j} \det((T_{i,j})_{ij}) = (-1)^{i+j} (-1)^{j-1+i} \det(E_{n-2}) = -1$$

を得る。

$E_{i,j}(s)$ は、単位行列 E_n の第 i 行に第 j 行の s 倍を加えた行列である。 $i < j$ のとき、 $E_{i,j}(s)$ は上三角行列であるため、問題 2 より、 $\det(E_{i,j}(s)) = 1$ が分かる。 $i > j$ のとき、 ${}^t E_{i,j}(s)$ は上三角行列である。よって、系 8 と問題 2 より、 $\det(E_{i,j}(s)) = \det({}^t E_{i,j}(s)) = 1$ が成り立つ。

問題 4. $m = 1$ のとき、第 1 列で展開すると、

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = a_{11} \det(D) = \det(A) \det(D)$$

を得るため、 $m = r-1$ のときは正しいと仮定し、 $m = r$ のときを示せばよい。 B の第 i 行を除いた行列を B_i とし、第 1 列で展開すると、

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} a_{i1} \det \begin{pmatrix} A_{i1} & B_i \\ O & D \end{pmatrix}$$

を得る。ここで、帰納法の仮定より、

$$\det \begin{pmatrix} A_{i1} & B_i \\ O & D \end{pmatrix} = \det(A_{i1}) \det(D)$$

が分かるため、

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) \det(D) = \det(A) \det(D)$$

を得る。