

練習問題その 1 1 (解答)

問題 1. 行列 $E_n + E_n = 2E_n$ は三角行列なので、性質 (11) より、

$$\det(E_n + E_n) = \det(2E_n) = 2^n$$

が分かる。同様に、 $2E_n$ は、 E_n の各行を 2 倍とした行列であるため、性質 (2) より、

$$\det(E_n + E_n) = \det(2E_n) \stackrel{(2)}{=} 2^n \det(E_n) = 2^n$$

を得る。

問題 2. $T_{3,4}T_{1,2}P = E_4$ から $(-1)(-1)\det(P) = \det(E_4)$ が分かるため、 $\det(P) = 1$ を得る。

$T_{1,2}T_{2,3}T_{3,4}Q = E_4$ から $(-1)(-1)(-1)\det(Q) = \det(E_4)$ ため、 $\det(Q) = -1$ が分かる。

問題 3. $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)$ 、 $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3)$ 、 $\mathbf{c} = (c_1 \ c_2 \ c_3)$ とすると、性質 (1) と (3) より、

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{c} + \mathbf{a} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{c} + \mathbf{a} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{c} + \mathbf{a} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} + \mathbf{a} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{c} + \mathbf{a} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} + \mathbf{a} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{c} + \mathbf{a} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} + \mathbf{a} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{c} + \mathbf{a} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{c} + \mathbf{a} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。さらに、性質 (9) より、

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

が分かる。すなわち、

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{c} + \mathbf{a} \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

を示した。

問題 4. A は可逆のとき、 $AA^{-1} = E_n = A^{-1}A$ である。よって、性質 (5) と (4) より、

$$\det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(E_n) = 1$$

を得る。従って、 $\det(A)$ はゼロでない、

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

が分かる。

問題 5. 性質 (5) と (4) より、

$$\det(A)^m = \det(A^m) = \det(E_n) = 1$$

を得る。 $\det(A)$ は実数なので、 $|\det(A)| = 1$ が分かる。

(A の成分は複素数のとき、どうなるのでしょうか?)