

練習問題その7 (解答)

問題 1. 教科書の131ページをご覧ください。

問題 2. (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T_{1,2}E_{1,2}(-2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = P_2(-1)E_{1,2}(2)E_{2,1}(-1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}(-2)T_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = E_{1,3}(-2)E_{2,3}(3)P_3\left(\frac{1}{4}\right)E_{3,2}(-1)E_{2,1}(-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(5)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_3\left(\frac{1}{2}\right)E_{2,3}(-1)T_{2,3}T_{1,3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(6)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T_{1,2}E_{3,1}(-1)P_3\left(-\frac{1}{2}\right)E_{3,2}(-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

(7)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}(-3)P_2\left(-\frac{1}{2}\right)E_{3,2}(-1)E_{2,1}(-1)E_{3,2}(-1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 3. まず、 $a \neq 0$ かつ $a \neq 3$ のとき、簡約化した行列が、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_1(1/a)E_{1,2}(-3)P_2(1/(a-3))E_{2,1}(-1) \begin{pmatrix} a & 3 \\ a & a \end{pmatrix}$$

となるため、階数は2であることを得る。それから、 $a = 0$ のとき、簡約化した行列が、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P_1(1/3) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるため、階数は1であることを得る。最後に、 $a = 3$ のとき、簡約化した行列が、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P_1(1/3)E_{2,1}(-1) \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ため、階数は1であることを得る。

問題 4. まず、 $a \neq 11$ のとき、簡約化した行列が、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_1(\frac{1}{2})E_{3,2}(-1)E_{1,2}(-5)P_2(\frac{1}{a-11})E_{2,3}(-1)E_{2,1}(-2) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & a & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であるため、階数は3であることを得る。それで、 $a = 11$ のとき、簡約化した行列が、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_1(\frac{1}{2})E_{1,2}(-5)T_{2,3}E_{2,3}(-1)E_{2,1}(-2) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、階数は2であることを得る。