## HVAD HANDLER MIN ARTIKEL I PNAS OM?

Der er for nyligt blevet skrevet i aviserne om en 50 år gammel matematisk "gåde" som jeg og min tidligere postdoc (forskningsadjunkt) David Schrittesser har løst, og publiceret løsningen i The Proceedings of the National Academy of Science of the USA (PNAS). På de kommende tre sider vil jeg forsøge at give en lidt mere fagligt detaljeret diskussion af hvad gåden går ud på og hvorfor den er interessant.

Niveauet er til at begynde med er tiltænkt gymnasiets matematik på højt niveau. Men senere beskriver jeg matematik der ligger langt over gymnasiets niveau, og her skal man nok væbne sig med stor tålmodighed for at få et udbytte (hvis man ikke er ekspert).

### En matematisk gåde (eller tre)

Kan du løse følgende matematiske problemer?

(1) Seks personer går ind i et lokale. Bevis at der er en gruppe på 3 personer i lokalet, som enten aldrig havde mødt hinanden før de gik ind i lokalet, eller også er der en gruppe på 3 personer i lokalet, som alle sammen kendte hinanden inden de gik ind i lokalet.

(2) Den uendelige lottokupon: En kupon i dette lottospil har uendeligt mange rækker, een række for hvert tal x i intervallet [0,1]. Den x'te række består af uendeligt mange hele, positive tal

$$x(0), x(1), x(2), \ldots$$

og der gælder den regel, at to forskellige rækker ikke må have uendeligt mange tal til fælles. Lottoudbyderen trækker uendeligt mange positive hele tal. En kupon vinder, hvis der er en række på kuponen, der har uendeligt mange tal til fælles med de tal, der er blevet udtrukket.

Findes der er en lottokupon, der vinder dette spil hver gang?

(3) Har de to foregående problemer noget med hinanden at gøre?

### Cantors mængdelære, Cohens forcing, og Kontinuumshypotesen

Resultatet i PNAS artiklen tilhører et område i matematik som hedder mængdelære (eller mængdeteori).

Mængdelære er en teori om uendelighedbegrebet i matematik, særligt om uendelige antal ("uendelige kardinaltal") og uendelige processer ("uendelige ordinaltal"). Mængdelæren blev introduceret af den tyske matematiker Georg Cantor i 1870erne, som reaktion på et stigende behov for en mere sofistikeret tilgang til uendelighed og uendelige processer i matematik.

Et *eksempel* på en uendelig process er udregningen af decimalerne i tallet $\pi$. Der er uendeligt mange decimaler i $\pi$, uden noget tilsyneladende mønster. Vi har algoritmer der gør det muligt at udregne så mange decimaler af $\pi$ som vi måtte ønske, i det man kalder en *uendelig approximationsprocess.*

Mængdelæren er en universel teori for al matematik. Alle andre former for matematik, inklusive geoemtri, algebra, talteori, osv., kan fortolkes inden for mængdelæren. I slutningen af 1800-tallet var et flertal af ledende matematikere derfor enige om at mængdelæren var *grundlaget for al matematik.*

I Cantors udforskning af uendelige antal opdagede han at der er forskellige grader af uendelighed. Det er klart at der er uendeligt mange positive hele tal

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

men det viser sig at hvis vi kigger på mængden af reelle tal (kommatal), så har denne mængde en højere grad af uendelig. Cantor kunne dog ikke finde ud af hvilken grad af uendelighed mængden af reelle tal har. Det fik ham til at formulere den såkaldte **Kontinuumshypotese**, som postulerer at mængden af reelle tal har den laveste grad af uendelighed *der er større end de hele tals* uendelighed. Kontinuumshypotesen blev en drivkraft i meget matematisk forskning i det 20. århundrede.

Kontinuumshypotesen blev "løst" i 1963 af den Amerikanske matematiker Paul Cohen. Paul Cohen beviste at de accepterede mængdeteoretiske grundprincipper, kaldet *aksiomerne* for mængdelæren er utilstrækkelige til at kunne bevise eller modbevise Kontinuumshypotesen. Cohen gjorde dette ved at indføre en teknik, der hedder *Forcing*, som gør det muligt at konstruere forskellige matematiske universer (kaldet *modeller*). Cohen viste at hvis der er et matematisk univers hvori Kontinuumshypotesen er sand, så er der et hvor den er falsk, og omvendt.

Løsningen af Kontinuumshypotesen var så stor en nyhed at det var på forsiden af New York Times! Se

`https://timesmachine.nytimes.com/timesmachine/1963/11/14/87346441.html?pageNumber=35`

## Solovay's model: Areal, volumen, målelighed, og regularitet

Næstefter Kontinuumshypotesen, så var de næste store uløste spørgsmål på ønskelisten i mængdelære spørgsmål om *regularitet og målelighed.*

Aksiomerne i mængdelæren er selvindlysende, bortset (muligvis) fra det sidste af dem, som kaldes *udvalgsaksiomet.* Udvalgsaksiomet medfører, at ikke alle delmængder af planen, eller delmængder af det 3-dimensionale rum, kan tillægges et areal eller volumen på en meningsfyldt måde. Spørgsmålet var, om dette "målelighedsproblem" alene skyldtes udvalgsaksiomet, dvs. om det var muligt at undgå problemet hvis man droppede udvalgsaksiomet.

En berømt konsekvens af Udvalgsaksiomet, og den tilhørende mangel på et meningsfuldt mål af volumen for visse delmængder af rummet, er det såkaldte Banach-Tarski Paradox.

Den Amerikanske matematiker Robert Solovay løste målelighedsproblemet for arealer, volumener, osv., omkring 1969, idet han viste at hvis vi dropper udvalgsaksiomet, så findes der en model (dvs. et matematisk univers) hvori alle delmængder af planen har et fornuftigt arealmål, og alle delmængder af de 3-dimensionale rum har et fornuftigt volumen (osv.).

## Tilbage til de 3 gåder: Ramseyteori og mad families

Areal og volumenmål er langt fra de eneste "målelighedsegenskaber" som matematikere benytter sig af. En anden vigtig målelighedsegenskab stammer fra kombinatorik, specifikt fra området *Ramseyteori.*

Gåde nr. (1) ovenfor er faktisk et specialetilfælde af et klassisk matematisk resultat, der hedder *Ramseys sætning.* Ramseys sætning fortæller os mere generelt, at når vi betragter tilstrækkeligt store matematiske systemer, så begynder der (uventet) at opstår orden og struktur ("regularitet").

I gåden er strukturen, der opstår, at der må være en gruppe på 3 personer, der enten alle kender hinanden i forvejen, eller en gruppe på 3 personer der alle ikke kendte hinanden i forvejen.

Matematikere blev naturligvis interesserede i om Ramseys sætning også er sand for uendelige mængder, i en eller anden form. Det viser sig at Udvalgsaksiomet igen står i vejen for at den Ramseyteoretiske regularitet kan brede sig til hele det matematiske univers.

Kort efter Solovay havde vist, at der er et univers hvor målelighedsproblemet kan løses, viste Adrian Mathias at det Ramseyteoretiske regularitetsproblem også kan løses. Faktisk har Solovays model total kombinatorisk regularitet, viste Mathias.

Mathias løste regularitetsproblemet ved at introducere en variant af Cohens forcing, som i dag hedder *Mathias forcing.* Mathias forcing er en metode til at bygge et nyt univers fra et gammelt, på en sådan måde at den kombinatoriske regularitet er højere i det nye univers end i det univers man starter med.

Og hvad har det så med Gåde nr. (2) at gøre? En lottokupon, der med sikkerhed vinder hver gang i det uendelige lottospil, der er beskrevet ovenfor, kaldes en *mad family*, dvs en *gal familie.* Ordet "mad" er kort for "maximal almost disjoint family".

Udvalgsaksiomet medfører, at der findes sådan nogen lottokuponer, dvs. der findes mad families. (Er der nogen mad families i Solovays model? Det vidste man i lang, lang tid ikke, men det problem løste jeg for cirka 5 år siden: Det er der ikke.)

Hvorfor er de her mad families, dvs. vindende lottokuponer, så interessante? Det er de, fordi de indirekte beskriver hvad der sker, når man laver et nyt univers vha. Mathias forcing.

Men hvis universet allerede har total kombinatorisk (Ramseyteoretisk) regularitet (kaldet "The Ramsey Property for all sets"), så er der jo ikke noget nyt at opnå ved at lave et nyt univers med Mathias forcing. Det fik Mathias til at fremsætte følgende hypotese (formodning) i 1969: *I et univers med total kombinatorisk regularitet findes der ingen mad families.* Det er *det* problem som David Schrittesser og jeg nu har løst, 50 år efter at formodningen blev fremsat. Løsningen kan læses her:

`https://www.pnas.org/content/early/2019/08/28/1906183116/tab-article-info`

## Hvad gør det godt for?

I dag er det blevet populært at spørge hvad ny forskning skal gøre godt for. Får man en bedre mobiltelefon ud af min forskning? Bruger flyene mindre brændstof i fremtiden pga. min forskning? Gør min forskning syge mennesker raske igen?

Det kan ikke udelukkes at der en dag vil findes anvendelser af den art, eller anvendelser som ingen kan forestille sig endnu, men det er ikke målet med min forskning. Min forskning er ren *videnskabelig* forskning, *ikke* teknologisk forskning. Videnskabelig forskning er drevet af ønsket af at forstå den verden vi lever i bedre, hvilket i mit tilfælde vil sige: Ønsket om bedre at forstå den matematik, vi bruger til at beskrive verden. Teknologisk forskning er afhængig af den viden og forståelse som videnskabelig forskning bibringer. Groft sagt: Ingen videnskab, ingen teknologiske fremskridt. Omvendt bliver vores muligheder for at bedrive videnskab bedre, jo bedre vores teknologi udvikles, og hvis den teknologiske forskning stoppede, så ville den videnskabelige forskning lide slemt. Derfor går teknologisk og videnskabelig udvikling hånd i hånd, og derfor skal der investeres i begge dele.

*Asger Törnquist, September 2019.*