

### 3 MI – juni 2001

Besvarelse af opgaverne 2-7.

**Opgave 2.** Idet

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{2^n}, \quad g_n = \frac{1}{2^n}$$

gælder  $|f_n(x)| \leq g_n$  for  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  og  $\sum_1^\infty g_n = 1 < \infty$ .

Vi kan nu bruge Sætning 4.26 med  $(X, \mathbb{E}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  og  $\mu$  tællemålet, og finder at

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

er kontinuert for  $x = 0$ , altså

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Alternativt kan vi vælge en følge  $x_j \rightarrow 0$  og bruge Eksempel 4.25 med

$$a_{nj} = f_n(x_j), \quad b_j = \frac{1}{2^j}.$$

**Opgave 3.** (i) følger af definitionen af mål med tæthed og Sætning 4.21.

Vi har for  $-1 < a < 1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^a}{1+x^2} dx &= 2 \int_0^1 \frac{x^a}{1+x^2} dx + 2 \int_1^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2} dx \\ &\leq 2 \int_0^1 x^a dx + 2 \int_1^{\infty} x^{a-2} dx, \end{aligned}$$

idet vi i første integral bruger  $1+x^2 \geq 1$ , i andet integral  $1+x^2 \geq x^2$ . Vi kan nu direkte finde stamfunktioner:

$$= 2 \left[ \frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_0^1 + 2 \left[ \frac{x^{a-1}}{a-1} \right]_1^{\infty} = \frac{2}{a+1} + \frac{2}{1-a} < \infty,$$

sammenlign med opgave 4.4.2°.

**Opgave 4.** Med  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$  fås

$$\|f\|_p = \left( \int_0^1 x^p dx \right)^{1/p} = \frac{1}{(p+1)^{1/p}}.$$

Da  $m([0, 1]) = 1$  giver Sætning 7.11 direkte, at  $\|f\|_r \leq \|f\|_s$  for  $r < s$ , og da  $f(x) = x$  ligger i alle  $\mathcal{L}_p([0, 1])$ ,  $1 \leq p < \infty$ , giver dette, at  $p \mapsto \|f\|_p$  er voksende for det betragtede  $f$ .

Typeset by  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

**Opgave 5.** Mængden  $S$  er afsluttet, specielt i  $\mathbb{B}_3$ , og da  $m_3 = m_1 \otimes m_2$  fås

$$m_3(S) = \int_{\mathbb{R}^2} m_1(S^{(x,y)}) dm_2(x,y) = 0,$$

idet

$$\begin{aligned} S^{(x,y)} &= \{z \in \mathbb{R} \mid (x,y,z) \in S\} = \{z \in \mathbb{R} \mid z^2 = 1 - x^2 - y^2\} \\ &= \begin{cases} \emptyset, & x^2 + y^2 > 1 \\ \{0\}, & x^2 + y^2 = 1 \\ \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

er en endelig mængde (0, 1 eller 2 elementer), og derfor er  $m_1(S^{(x,y)}) = 0$  for alle  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Opgave 6.** Skitsen gives ikke her, men den giver inspiration til uligheden

$$f(t) \geq \frac{1}{2} \text{ for } t \in [1, \infty[.$$

At  $f$  er en Borelfunktion ses f.eks. ved at udnytte beviset for Tuborg-lemmaet: For  $B \in \mathbb{B}$  er

$$f^{-1}(B) = (f \mid ]-\infty, 1])^{-1}(B) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (f \mid [k, k+1])^{-1}(B),$$

altså en tællelig forening af Borelmængder, da de optrædende restriktioner er kontinuerte og dermed Borel.

En anden mulighed er at

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & t \in ]-\infty, n[ \\ 0, & t \in [n, \infty[ \end{cases}$$

er Borel ifølge Tuborg-lemmaet og  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$  for alle  $t \in \mathbb{R}$ . Som punktvis grænseværdi af Borelfunktioner er  $f$  Borel.

Vi har

$$\int f dm \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{2} dm = \frac{1}{2} m([1, \infty[) = \infty.$$

**Opgave 7.** Vi skal eftervise (i)–(iii) i Definition 1, Appendix. For  $A \in \mathcal{P}(X)$  sættes  $T_A = \{E \in \mathbb{E} \mid A \subseteq E\}$ , så

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(E) \mid E \in T_A\}.$$

(i) Det er klart at  $\mu^*(A) \geq 0$ , og da  $\mu(\emptyset) = 0$  indgår 0 i talmængden, hvis infimum er  $\mu^*(\emptyset)$ , altså  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .

(ii) For  $A \subseteq B$  vil  $T_A \supseteq T_B$  så ved udregning af  $\mu^*(A)$  tages infimum over en større talmængde end ved udregning af  $\mu^*(B)$ , altså  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ .

(iii) Uligheden  $\mu^*\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) \leq \sum_1^\infty \mu^*(A_n)$  er klar, hvis der findes et  $n$  så  $\mu^*(A_n) = \infty$ .

Antag derfor  $\mu^*(A_n) < \infty$  for alle  $n$  og lad  $\varepsilon > 0$  være vilkårlig.

Ifølge definitionen findes  $E_n \in T_{A_n}$  med

$$\mu(E_n) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Da  $E_n \in \mathbb{E}$ ,  $A_n \subseteq E_n$  gælder  $E = \bigcup_1^\infty E_n \in \mathbb{E}$  og  $\bigcup_1^\infty A_n \subseteq E$ , altså

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) &\leq \mu(E) = \mu\left(\bigcup_1^\infty E_n\right) \leq \sum_1^\infty \mu(E_n) \\ &\leq \sum_1^\infty \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_1^\infty \mu^*(A_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  var vilkårlig fås det ønskede. (Bevisidéen er brugt i Appendix i beviset for Lemma 8).