3 MI – juni 2001

Besvarelse af opgaverne 2-7.

Opgave 2. Idet

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{2^n}, \quad g_n = \frac{1}{2^n}$$

gælder $|f_n(x)| \le g_n$ for $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \cdots$ og $\sum_1^\infty g_n = 1 < \infty$.

Vi kan nu bruge Sætning 4.26 med $(X, \mathbb{E}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ og μ tællemålet, og finder at

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

er kontinuert for $x = 0$, altså

$$\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,.$$

Alternativt kan vi vælge en følge $x_j \to 0$ og bruge Eksempel 4.25 med

$$a_{nj} = f_n(x_j)\,, \quad b_j = \frac{1}{2^j}\,.$$

Opgave 3. (i) følger af definitionen af mål med tæthed og Sætning 4.21.

Vi har for $-1 < a < 1$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^a}{1+x^2}dx &= 2\int_0^1 \frac{x^a}{1+x^2}dx + 2\int_1^\infty \frac{x^a}{1+x^2}dx \\ &\le 2\int_0^1 x^a dx + 2\int_1^\infty x^{a-2}dx\,,\end{aligned}$$

idet vi i første integral bruger $1 + x^2 \ge 1$, i andet integral $1 + x^2 \ge x^2$. Vi kan nu direkte finde stamfunktioner:

$$= 2\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 + 2\left[\frac{x^{a-1}}{a-1}\right]_1^\infty = \frac{2}{a+1} + \frac{2}{1-a} < \infty\,,$$

sammenlign med opgave 4.4.2°.

Opgave 4. Med $f(x) = x$, $x \in [0,1]$ fås

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 x^p dx\right)^{1/p} = \frac{1}{(p+1)^{1/p}}\,.$$

Da $m([0,1]) = 1$ giver Sætning 7.11 direkte, at $\|f\|_r \le \|f\|_s$ for $r < s$, og da $f(x) = x$ ligger i alle $\mathcal{L}_p([0,1])$, $1 \le p < \infty$, giver dette, at $p \mapsto \|f\|_p$ er voksende for det betragtede f.

Opgave 5. Mængden S er afsluttet, specielt i $\mathbb{B}_3$, og da $m_3 = m_1 \otimes m_2$ fås

$$m_3(S) = \int_{\mathbb{R}^2} m_1(S^{(x,y)}) dm_2(x,y) = 0\,,$$

idet

$$\begin{aligned} S^{(x,y)} &= \{z \in \mathbb{R} \mid (x,y,z) \in S\} = \{z \in \mathbb{R} \mid z^2 = 1 - x^2 - y^2\} \\ &= \begin{cases} \varnothing\,, & x^2 + y^2 > 1 \\ \{0\}\,, & x^2 + y^2 = 1 \\ \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}\,, & x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

er en endelig mængde ($0, 1$ eller 2 elementer), og derfor er $m_1(S^{(x,y)}) = 0$ for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Opgave 6. Skitsen gives ikke her, men den giver inspiration til uligheden

$$f(t) \geq \frac{1}{2} \quad \text{for} \quad t \in [1, \infty[\,.$$

At f er en Borelfunktion ses f.eks. ved at udnytte beviset for Tuborg-lemmaet: For $B \in \mathbb{B}$ er

$$f^{-1}(B) = (f \mid]-\infty, 1[)^{-1}(B) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (f \mid [k, k+1[)^{-1}(B)\,,$$

altså en tællelig forening af Borelmængder, da de optrædende restriktioner er kontinuerte og dermed Borel.

En anden mulighed er at

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t)\,, & t \in]-\infty, n[\\ 0\,, & t \in [n, \infty[\end{cases}$$

er Borel ifølge Tuborg-lemmaet og $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Som punktvis grænseværdi af Borelfunktioner er f Borel.

Vi har

$$\int f\, dm \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{2}\, dm = \frac{1}{2} m([1, \infty[) = \infty\,.$$

Opgave 7. Vi skal eftervise (i)–(iii) i Definition 1, Appendix. For $A \in \mathcal{P}(X)$ sættes $T_A = \{E \in \mathbb{E} \mid A \subseteq E\}$, så

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(E) \mid E \in T_A\}\,.$$

(i) Det er klart at $\mu^*(A) \geq 0$, og da $\mu(\varnothing) = 0$ indgår 0 i talmængden, hvis infimum er $\mu^*(\varnothing)$, altså $\mu^*(\varnothing) = 0$.

(ii) For $A \subseteq B$ vil $T_A \supseteq T_B$ så ved udregning af $\mu^*(A)$ tages infimum over en større talmængde end ved udregning af $\mu^*(B)$, altså $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(iii) Uligheden $\mu^*\left(\bigcup\limits_1^\infty A_n\right) \leq \sum\limits_1^\infty \mu^*(A_n)$ er klar, hvis der findes et n så $\mu^*(A_n) = \infty$. Antag derfor $\mu^*(A_n) < \infty$ for alle n og lad $\varepsilon > 0$ være vilkårlig.

Ifølge definitionen findes $E_n \in T_{A_n}$ med

$$\mu(E_n) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\,, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Da $E_n \in \mathbb{E}$, $A_n \subseteq E_n$ gælder $E = \bigcup\limits_1^\infty E_n \in \mathbb{E}$ og $\bigcup\limits_1^\infty A_n \subseteq E$, altså

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) &\leq \mu(E) = \mu\left(\bigcup_1^\infty E_n\right) \leq \sum_1^\infty \mu(E_n)\\ &\leq \sum_1^\infty \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_1^\infty \mu^*(A_n) + \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ var vilkårlig fås det ønskede. (Bevisidéen er brugt i Appendix i beviset for Lemma 8).