Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1999

Matematik 3 MI (forårspensum)

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Opgavesættet er på 3 sider og består af 9 opgaver.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af stilopgaven (Opgave 1). Opgave 1 vægtes med 90 point, og de øvrige opgaver (Opgave 2 – 9) vægtes med tilsammen 90 point.

Opgave 1 Stilopgave (90 point)

Formuler og bevis Fischer's fuldstændighedssætning

For at komme godt igang med beviset for Fischer's sætning, oplyses det, at man begynder med en følge $g_k \in \mathcal{L}_p$, hvorom det gælder, at $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty$. Undervejs i beviset får man brug for at kigge på funktionen

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|.$$

Man kan endvidere gratis benytte Sætning 7.10, som siger følgende:

Lad $f_n \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, $n = 1, 2, \ldots$, og lad f være en målelig funktion så $\lim_n f_n(x) = f(x)$ for μ-næsten alle $x \in X$. Hvis der findes $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med $\int g^p d\mu < \infty$, — (vi regner $\infty^p = \infty$) —, således at $|f_n| \leq g$ μ-n.o. for ethvert $n \in \mathbb{N}$, da er $f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ og

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

Et godt råd: Med til beviset for fuldstændighedssætningen hører Sætning 7.16, som udtaler sig om fuldstændighed og absolut konvergente rækker. Din besvarelse bør indeholde en formulering af denne sætning *men udskyd beviset for Sætning 7.16 til sidst.*

Opgave 2 (5 point)

Giv tre forskellige eksempler på σ-algebraer på den reelle akse $\mathbb{R}$.

Opgave 3 (15 point)

Sæt

$$F(t) = \int_0^1 \sin(x^2 + t^2) dx, \qquad t \in [-10, 10].$$

Opgave 3 fortsættes på side 2

Gør rede for, at F er kontinuert og differentiabel, og at

$$F'(t) = \int_0^1 2t\cos(x^2+t^2)dx.$$

Opgave 4 (10 point)

Gør omhyggeligt rede for, at

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \sin(\sqrt{xy+x})dx\Big)dy = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \sin(\sqrt{xy+x})dy\Big)dx.$$

Opgave 5 (10 point)

Bestem

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1/2)^n 1_{[n,n+1]}dm.$$

Der skal argumenteres omhyggeligt.

Opgave 6 (15 point)

Betragt det målbare rum $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. Lad μ være tællemålet på $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$, og lad ε_n være Diracmålet i n på $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. Gør rede for, at $\mu+\varepsilon_2+\varepsilon_4$ er et mål på $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. Bestem

$$\int_{\mathbb{N}} f d(\mu+\varepsilon_2+\varepsilon_4),$$

hvor $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ er givet ved $f(n) = 2^{-n}$.

Opgave 7 (10 point)

Betragt målrummet $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), m)$. Sæt $f_n = n^2 1_{[n,n+n^{-5}]}$.

(i) Gør rede for, at $f_n \to 0$ punktvis overalt.

(ii) For hvilke p, $1 \le p < \infty$, gælder $f_n \to 0$ i p-middel?

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 8 (10 point)

Gør omhyggeligt rede for, at

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}\cos(\sqrt{x^2+n^2})dx = 0.$$

Opgave 9 (15 point)

Betragt delmængden E af $\mathbb{R}^2$ givet ved

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|\leq 1\}.$$

(i) Gør rede for, at E er en Borelmængde.
(ii) Bestem snittet E_x for alle x i $\mathbb{R}$.
(iii) Idet m som sædvanligt angiver Lebesguemålet på $\mathbb{R}$ og $\varepsilon_{1/2}$ er Diracmålet i $1/2$, ønskes $(\varepsilon_{1/2}\otimes m)(E)$ bestemt.