Opgave 4.9

Jakob Stubgaard

9. marts 2001

1:
For $x \in]0;1[$ gælder at

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x^a)x^{b-1+2na} = (1-x^a)x^{b-1}\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2a})^n \tag{1}$$

Den sidste række er en geometrisk række og da $x \in]0;1[$ og $a > 0$ er rækken konvergent med sum $\frac{1}{1-x^{2a}} = \frac{1}{(1-x^a)(1+x^a)}$. Dermed får vi at

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x^a)x^{b-1+2na} = \frac{x^{b-1}}{(1+x^a)} \tag{2}$$

2:
Vi definerer funktionen $f_n :]0;1[\to \mathbb{R}_+$ ved $f_n(x) = (1-x^a)x^{b-1+2na}$ (og f_n *er* positiv da $x \in]0;1[$ og $a > 0$). f_n er kontinuert og derfor specielt målelig. Sætning 4.6 kombineret med 1: giver derfor at

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}}{(1+x^a)}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \tag{3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (x^{b-1+2na} - x^{a+b-1+2na})dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b+2na} - \frac{1}{b+(2n+1)a}\right) \tag{4}$$

hvilket var hvad der skulle vises. Bemærk at vi for at udføre integrationen i (4) skal bruge at $b > 0$ (jvf. opgave 4.4).