Vejledende besvarelse af opgave 4.22

Rasmus Ejlers Møgelberg

16. marts 2001

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum.

1°: Antag først $f, g : X \to \mathbb{C}$ er integrable funktioner, samt at g er begrænset. Vi skal vise at fg er integrabel. Da f og g er målelige, er fg målelig. I følge sætning 4.11 (generaliseret på side 4.15 til funktioner ind i $\mathbb{C}$) er det nok at vise at $\int |fg| d\mu < \infty$.

At g er begrænset betyder netop at der eksisterer et tal c så $|g(x)| \leq c$ for alle $x \in X$. Nu bliver:

$$\int |fg| d\mu \leq \int c|f| d\mu = c \int |f| d\mu < \infty$$

som ønsket.

2°: Antag nu at $g : X \to \mathbb{C}$ er $\mathbb{E}$-målelig og begrænset, samt at $\mu(X) < \infty$. Vi skal nu vise at g er integrabel. Som før er det nok at vise at $\int |g| d\mu$ er endelig. Da g er begrænset vælges igen c så $|g(x)| \leq c$ for alle x, og vi får:

$$\int |g| d\mu \leq \int c d\mu = c\mu(X) < \infty$$

som ønsket.