

Opgave 4.36

Jakob Stubgaard

22. marts 2001

Vi lader (X, \mathbb{E}, μ) være et målrum og antager at $\phi : (X, \mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{R}$ er en simpel \mathbb{E} -målelig funktion. Da ϕ er simpel og \mathbb{E} -målelig findes n reelle tal, a_1, \dots, a_n , og n *disjunkte* mængder A_1, \dots, A_n i \mathbb{E} således at $\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x)$ for alle x i X . Her er $A_i = \phi^{-1}(\{a_i\})$. Afbildningen $B \mapsto \mu(\phi^{-1}(B))$, $B \in \mathbb{B}$, er da et mål på Borelalgebraen (jvf. afsnit 4.5) som betegnes $\phi(\mu)$.

For en vilkårlig Borelmængde, B , gælder at

$$\phi(\mu)(B) = \mu(\phi^{-1}(B)) \tag{1}$$

$$= \mu(\cup_{a_i \in B} A_i) \tag{2}$$

$$= \sum_{a_i \in B} \mu(A_i) \tag{3}$$

$$= \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \epsilon_{a_i}(B) \tag{4}$$

I skridtet fra (2)-(3) udnyttede vi at mængderne A_1, \dots, A_n var parvist disjunkte og i sidste skridt brugte vi definitionen at Diracmålet i a_i . Da B var vilkårlig gælder altså at $\phi(\mu) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \epsilon_{a_i}$, hvilket var hvad der skulle vises.