Opgave 4.36

Jakob Stubgaard

22. marts 2001

Vi lader $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og antager at $\phi : (X, \mathbb{E}) \to \mathbb{R}$ er en simpel $\mathbb{E}$–målelig funktion. Da ϕ er simpel og $\mathbb{E}$–målelig findes n reelle tal, $a_1, ..., a_n$, og n *disjunkte* mængder $A_1, ..., A_n$ i $\mathbb{E}$ således at $\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x)$ for alle x i X. Her er $A_i = \phi^{-1}(\{a_i\})$.
Afbildningen $B \mapsto \mu(\phi^{-1}(B))$, $B \in \mathbb{B}$, er da et mål på Borelalgebraen (jvf. afsnit 4.5) som betegnes $\phi(\mu)$.
For en vilkårlig Borelmængde, B, gælder at

$$\begin{aligned} \phi(\mu)(B) &= \mu(\phi^{-1}(B)) && (1) \\ &= \mu(\cup_{a_i \in B} A_i) && (2) \\ &= \sum_{a_i \in B} \mu(A_i) && (3) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu(A_i)\epsilon_{a_i}(B) && (4) \end{aligned}$$

I skridtet fra (2)-(3) udnyttede vi at mængderne $A_1, ..., A_n$ var parvist disjunkte og i sidste skridt brugte vi definitionen at Diracmålet i a_i. Da B var vilkårlig gælder altså at $\phi(\mu) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)\epsilon_{a_i}$, hvilket var hvad der skulle vises.