Vejledende besvarelse af den skriftlig afleveringsopgave til uge 13

Rasmus Ejlers Møgelberg

30. marts 2001

Opgaven handler om Riemanns zeta-funktion, der er defineret ved:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

for $x > 1$.

<u>1 :</u> Først skal vi vise at dette er en veldefineret funktion, og at den er kontinuert. At den er veldefineret følger af at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ er konvergent for $x > 1$, hvilket er velkendt fra Mat 1.

For at vise at ζ er kontinuert bemærkes først at integralet med hensyn til tællemålet af funktionen $n \mapsto \frac{1}{n^x}$ netop er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, hvilket følger af sætning 4.24. Nu ønsker vi at bruge 4.26, som siger at ζ er kontinuert hvis der findes en funktion $g(n)$ så $g(n) \geq |\frac{1}{n^x}|$ (bemærk at g skal være uafhængig af x) for alle n og $x > 1$ og g er integrabel mht. tællemålet, dvs. $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)$ er konvergent.

For at finde denne majorant er vi nødt til at gøre et lille krumspring. Det må være nok at vise at ζ er kontinuert for $x > a$ for alle $a > 1$. Så vi skal blot finde $g(n)$ integrabel, så $g(n) \geq |\frac{1}{n^x}|$ for $x > a$. Så sæt $g(n) = \frac{1}{n^a}$. Da er $g(n) > \frac{1}{n^x}$ for $x > a$ og $\sum_{n=1}^{\infty} g(n) < \infty$, og sætning 4.26 giver at ζ er kontinuert i $x > a$ for alle $a > 1$, som ønsket.

<u>2 :</u> Nu skal vi vise at $\zeta(x) \to \infty$ for $x \to 1$ og $\zeta(x) \to 0$ for $x \to \infty$. I det sidste er faktisk en fejl i opgaven, da $\zeta(x)$ faktisk går mod 1 for $x \to \infty$. Givet en dalende følge (x_k), der konvergerer mod 1 skal vi vise at $\zeta(x_k) \to \infty$. Nu definerer $f_k(n) = \frac{1}{n^{x_k}}$ en følge af positive funktioner, der vokser mod $f(n) = \frac{1}{n}$. Da integralet mht. tællemålet er summen giver monotonisætningen at:

$$\lim_{k\to\infty} \zeta(x_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_k(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} f_k(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

For en følge (x_k), der vokser mod ∞, er funktionsfølgen f_k givet ved $f_k(n) = \frac{1}{n^{x_k}}$ en dalende følge, der punktvis konvergerer mod den funktion, der er 1 i $n = 1$ og 0 ellers. Vi kan naturligvis antage at $x_1 > 1$, og da bliver f_1 en integrabel majorant for funktionsfølgen mht. tællemålet på $\mathbb{N}$. Majorantsætningen giver nu:

$$\lim_{k\to\infty}\zeta(x_k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_k(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{k\to\infty}f_k(n)=1+\sum_{n=2}^{\infty}0=1$$

Så dette viser at $\zeta(x)\to 1$ for $x\to\infty$.

<u>3 :</u> I denne delopgave skal vi vise at ζ er differentiabel med differentialkvotient

$$\zeta'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^x}$$

Endnu en gang skal vi benytte at integralet mht. tællemålet er summen, så vi kan opfatte ζ som et integral. Vi vil benytte sætning 4.28. Denne siger, at hvis der findes en funktion $g(n)$, så $g(n)\geq|\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{n^x}|$ for alle x og alle n (bemærk igen at g er uafhængig af x), og således at g er summabel, da er ζ differentiabel med differentialkvotient

$$\zeta'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{n^x}$$

Så lad os først differentiere:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{n^x}=\frac{\partial}{\partial x}e^{-(\log n)x}=-\frac{\log n}{n^x}$$

Vi ser, at det giver den differentialkvotient, vi ønskede. Som i delopgave 1 er vi igen nødt til at lave et lille krumspring for at finde en summabel majorant. Det er nok at vise at ζ er differentiabel på $]a,\infty]$ for ethvert $a>1$. Så dette betyder at det er nok at finde en summabel funktion g, der er majorant inden for dette område. For $x>a$ er $\frac{1}{n^x}<\frac{1}{n^a}$ og ud fra betragtninger om assymptotisk vækst findes der en konstant c, så $\log n\leq cn^{(a-1)/2}$ for alle $n\in\mathbb{N}$, da $\frac{(a-1)}{2}>0$. Så nu bliver:

$$|-\frac{\log n}{n^x}|\leq\frac{cn^{(a-1)/2}}{n^a}=\frac{c}{n^{(a+1)/2}}$$

Hvis vi sætter $g(n)=\frac{c}{n^{(a+1)/2}}$ får vi altså en summabel majorant for $-\frac{\log n}{n^x}$, så sætning 4.28 tillader os at konkludere at ζ er differentiabel med den ønskede differentialkvotient.

<u>4 :</u> Vi vil nu vise at ζ er vilkårligt ofte differentiabel med k'te differential kvotient

$$\zeta^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\log n)^k}{n^x}$$

Lad os vise det ved induktion efter k. Basistilfældene $k = 0, 1$ er allerede bevist, og induktionsskridtet vises på samme måde som i delopgave 3. Antag ζ er k gange differentiabel. Vi vil vise at ζ er $k+1$ gange differentiabel på intervallet $]a, \infty[$ for alle $a > 1$ ved hjælp af sætning 4.28. Først differentierer vi funktionen under sumtegnet:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{(-\log n)^k}{n^x} = \frac{(-\log n)^{k+1}}{n^x}$$

Vi skal som før finde en majorant for dette udtryk, der er uafhængig af x. Men igen er $\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^a}$, og der findes en konstant c, så $(\log n)^k < cn^{(a+1)/2}$, og vi kan konstruere en majorant:

$$g(n) = \frac{c}{n^{(a+1)/2}}$$

Som før giver sætning 4.28 nu, at ζ er $k+1$ gange differentiabel og

$$\zeta^{(k+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\log n)^{k+1}}{n^x}$$

som ønsket.