Opgave 5.7

Jakob Stubgaard

3. april 2001

Vi lader $L = \{2,4,6,...\}$ være mængden af lige tal og $P = \{2,3,5,7,...\}$ være mængden af primtal. Med notation som i afsnit 5.1 skal vi bestemme $\mathbb{D}(\{L,P\})$ samt $\sigma(\{L,P\})$.
Enhver σ–klasse skal indeholde hele mængden, dvs. der må gælde at $\mathbb{N} \in \mathbb{D}(\{L,P\})$. Da en σ–klasse ydermere skal være stabil over for komplentærmængdedannelse må mængderne $\emptyset$, $\complement L$ og $\complement P$ også tilhøre $\mathbb{D}(\{L,P\})$. Mao. har vi at $\mathbb{D} := \{\emptyset, \mathbb{N}, L, \complement L, P, \complement P\} \subseteq \mathbb{D}(\{L,P\})$. Hvis vi kan vise at systemet $\mathbb{D}$ er en σ–klasse så må der gælde lighedstegn idet $\mathbb{D}(\{L,P\})$ er den mindste σ–klasse der indeholder L og P. Man checker let at definition 5.1 gælder for systemet $\mathbb{D}$, idet vi bemærker at de eneste ikke–trivielle *disjunkte* foreninger vi kan danne med mængder fra $\mathbb{D}$ er $L \cup \complement L$, $P \cup \complement P$ og $\emptyset \cup \mathbb{N}$. Disse foreningsmængder er alle lig med $\mathbb{N}$ og de tilhører derfor $\mathbb{D}$. Dermed har vi vist at $\mathbb{D}(\{L,P\}) = \mathbb{D}$, specielt har vi vist at $\mathbb{D}(\{L,P\})$ indeholder netop 6 elementer.

For at bestemme $\sigma(\{L,P\})$ benyttes samme strategi som i opgave 1.5 (jvf. uge 6). Vi danner først de 4 byggesten A_{ij}, $i,j = 0,1$ som er givet ved $A_{ij} = L_i \cap P_j$, hvor $L_0 = L$, $L_1 = \complement L$, $P_0 = P$ og $P_1 = \complement P$. Mao. er

$$A_{00} = L \cap P = \{2\} \quad \text{og} \quad A_{01} = L \cap (\complement P) = \{4,6,8,...\} \tag{1}$$

$$A_{10} = (\complement L) \cap P = \{3,5,7,11,...\} \quad \text{og} \quad A_{11} = (\complement L) \cap (\complement P) = \{1,9,15,21,...\} \tag{2}$$

Vi bemærker først at disse 4 mængder er disjunkte og at deres forening er lig $\mathbb{N}$. At de er disjunkte er klart og at deres foreningsmængde er $\mathbb{N}$ skyldes at ethvert naturligt tal, n, jo enten vil ligge i L eller $\complement L$ og tilsvarende for P. Vi vælger derfor den kombination af L, $\complement L$, P og $\complement P$ således at $n \in A_{ij}$.
Da $\sigma(\{L,P\})$ er en σ–algebra som indeholder L og P må alle mængderne A_{ij} tilhøre $\sigma(\{L,P\})$ (en σ–algebra er fællesmængdestabil) og da enhver σ–algebra endvidere er foreningsmængdestabil må samtlige tænkelige foreningsmængder af de fire mængder, A_{ij}, også tilhøre $\sigma(\{L,P\})$. Disse foreninger er der netop 16 mulige af (inklusive den tomme forening $\emptyset$). Antallet af sådanne foreninger er nemlig lig med antallet af delmængder af en mængde på 4 elementer som jo er $2^4 = 16$.
Kan vi vise at mængdesystemet bestående af disse 16 mængder, betegnet $\mathbb{E}$, udgør en σ–algebra, så gælder at $\sigma(\{L,P\}) = \mathbb{E}$, idet $\sigma(\{L,P\})$ er den mindste σ–algebra der indeholder L og P.
Ifølge ovenstående er $\mathbb{N}$ lig med foreningen af de fire mængde A_{ij} dvs. $\mathbb{N} \in \mathbb{E}$. Endvidere er $\mathbb{E}$ også stabil overfor tællelige foreninger idet hvis $E_1, E_2, ... \in \mathbb{E}$, så er alle mængderne E_n en forening af de fire mængder A_{ij}, og derfor vil $\cup_n E_n$ også være det. Endelig er $\mathbb{E}$ også stabil overfor komplementærmængdedannelse, idet hvis E er en forening af nogle af A_{ij}'erne så er $\complement E$ lig med foreningen af de resterende A_{ij}'er (mængderne A_{ij} var disjunkte og deres forening var $\mathbb{N}$). Altså er $\mathbb{E}$ en σ–algebra, og hermed er det vist at antallet af elementer i $\sigma(\{L,P\})$ er netop 16. I denne opgave har vi altså et eksempel på en σ–klasse som *ikke* er en σ–algebra.
I opgave 1.5 viste vi, ved samme bevis som her, at antallet af elementer i $\sigma(\{L,P\})$ var højst 16, men hvis beviset gås efter ser man, at grunden til, at vi får netop 16 elementer i denne opgave, er, at de fire byggesten, A_{ij}, er ikke–tomme.