

## Vejledende besvarelse af opgave 5.25

Rasmus Ejlers Møgelberg

18. april 2001

Lad  $E \subseteq ]0, 1]$  være en Borelmængde med positivt Lebesgue-mål. Vi definerer nu en ækvivalensrelation i  $E$  ved:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

Ækvivalensrelationen deler  $E$  i ækvivalensklasser, og ved hjælp af udvalgsaksiomet definerer vi mængden  $A$  til at bestå af netop en representant fra hver ækvivalensklasse. Vi skal nu vise at:

$$E \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap ]-1, 1[} (A + q) \subseteq ]-1, 2[ \quad (*)$$

Givet  $x \in E$  findes  $a \in A$  i samme ækvivalensklasse som  $x$ . Dvs.  $x - a = q \in \mathbb{Q}$ , og da  $x, a \in ]0, 1]$  er  $q \in ]-1, 1[$ . Dette viser den første inklusion. Den anden inklusion følger af at  $A \subseteq ]0, 1]$ .

I anden del af opgaven skal vi vise at  $A$  ikke er Lebesgue målelig. Antag for modstrid at  $A$  er Lebesgue målelig. Først bemærkes at foreningen i midten af ligningen (\*) er en tællelig forening af disjunkte mængder, ud fra konstruktionen af  $A$ . Antag nemlig at  $a_1 + q_1 = a_2 + q_2$ , for  $a_1, a_2 \in A$  og  $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap ]-1, 1[$ , da er  $a_1 \sim a_2$ , og da der kun var et element i  $A$  for hver ækvivalensklasse må  $a_1 = a_2$  og  $q_1 = q_2$ . Hvis  $A$  er målelig er da  $A + q$  samt foreningen af disse målelig med mål:

$$m(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap ]-1, 1[} (A + q)) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap ]-1, 1[} m(A + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap ]-1, 1[} m(A) = \infty \cdot m(A)$$

Af første inklusion i (\*) ses at foreningen må have mål større end  $E$ , som har strengt positivt mål. For at dette kan lade sig gøre må  $A$  have positivt mål. Af den anden inklusion ses at foreningen må have mål mindre end  $m(]-1, 2[) = 3$ , hvilket medfører at  $A$  har mål nul. Dette er en modstrid.