Vejledende besvarelse af opgave 5.25

Rasmus Ejlers Møgelberg

18. april 2001

Lad $E \subseteq]0,1]$ være en Borelmængde med positivt Lebesgue-mål. Vi definerer nu en ækvivalensrelation i E ved:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

Ækvivalensrelationen deler E i ækvivalensklasser, og ved hjælp af udvalgsaksiomet definerer vi mængden A til at bestå af netop en representant fra hver ækvivalensklasse. Vi skal nu vise at:

$$E \subseteq \cup_{q \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[}(A+q) \subseteq]-1,2[\qquad (*)$$

Givet $x \in E$ findes $a \in A$ i samme ækvivalensklasse som x. Dvs. $x - a = q \in \mathbb{Q}$, og da $x, a \in]0,1]$ er $q \in]-1,1[$. Dette viser den første inklusion. Den anden inklusion følger af at $A \subseteq]0,1]$.

I anden del af opgaven skal vi vise at A ikke er Lebesgue målelig. Antag for modstrid at A er Lebesgue målelig. Først bemærkes at foreningen i midten af ligningen $(*)$ er en tællelig forening af disjunkte mængder, ud fra konstruktionen af A. Antag nemlig at $a_1 + q_1 = a_2 + q_2$, for $a_1, a_2 \in A$ og $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[$, da er $a_1 \sim a_2$, og da der kun var et element i A for hver ækvivalensklasse må $a_1 = a_2$ og $q_1 = q_2$. Hvis A er målelig er da $A + q$ samt foreningen af disse målelig med mål:

$$m(\cup_{q \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[}(A+q)) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[} m(A+q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[} m(A) = \infty \cdot m(A)$$

Af første inklusion i $(*)$ ses at foreningen må have mål større end E, som har strengt positivt mål. For at dette kan lade sig gøre må A have positivt mål. Af den anden inklusion ses at foreningen må have mål mindre end $m(]-1,2[) = 3$, hvilket medfører at A har mål nul. Dette er en modstrid.