Sommer 2000 opgave 2 og 6

Jakob Stubgaard

27. april 2001

OPGAVE 2:
Vi skal bestemme

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\sqrt{1+x^2/n})}{1+x^2}dx$$

For alle $n\in\mathbb{N}$ og alle $x\in\mathbb{R}$ gælder at $|\frac{\cos(\sqrt{1+x^2/n})}{1+x^2}|\leq\frac{1}{1+x^2}=f(x)$. f er integrabel idet den er målelig (da kontinuert) og

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=[\arctan(x)]_{-\infty}^{\infty}=\pi<\infty \tag{1}$$

Dvs. f er en integrabel majorant for funktionsfølgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hvor $f_n(x)=\frac{\cos(\sqrt{1+x^2/n})}{1+x^2}$. Der gælder at f_n er målelig for alle n (da f_n er kontinuert) og desuden gælder at $f_n(x)\to\frac{\cos(1)}{1+x^2}$ punktvis for $n\to\infty$. Lebesgues majorantsætning giver derfor at

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\sqrt{1+x^2/n})}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(1)}{1+x^2}dx=\cos(1)\pi \tag{2}$$

Her følger sidste lighedstegn af (1).

OPGAVE 6:
i) For $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi$ gælder at $|\cos(x)|<1$ og derfor vil $|\cos(x)|^n\to 0$ for $n\to\infty$. For $x\in\mathbb{Z}\pi$ er $|\cos(x)|=1$ og derfor vil $|\cos(x)|^n$ ikke konvergere mod 0 når $n\to\infty$. Men mængden $\mathbb{Z}\pi$ er en m–nulmængde, da den er tællelig, dvs. $|\cos(x)|^n\to 0$ m–n.o.
ii) Vi sætter $A=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}([-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]+n\pi)=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{4}+n\pi,\frac{\pi}{4}+n\pi]$. A er en Borelmængde da den er en tællelig forening af afsluttede intervaller og da disse intervaller er disjunkte gælder at

$$m(A)=m(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{4}+n\pi,\frac{\pi}{4}+n\pi])=\sum_{n\in\mathbb{Z}}m([-\frac{\pi}{4}+n\pi,\frac{\pi}{4}+n\pi])=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\pi}{2}=\infty \tag{3}$$

iii) Vi får oplyst at $|\cos(x)|\geq\frac{\sqrt{2}}{2}1_A(x)$ for $x\in\mathbb{R}$. Dermed gælder for et vilkårligt $n\in\mathbb{N}$ at

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\cos(x)|^n dx\geq\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n 1_A(x)dx=(\frac{\sqrt{2}}{2})^n m(A)=\infty \tag{4}$$

Dermed gælder altså *ikke* at $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\cos(x)|^n dx=0$.