Sommer 2000 opgave 2 og 6

Jakob Stubgaard

27. april 2001

OPGAVE 2:
Vi skal bestemme

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\sqrt{1+x^2/n})}{1+x^2}dx$$

For alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $x \in \mathbb{R}$ gælder at $|\frac{\cos(\sqrt{1+x^2/n})}{1+x^2}| \leq \frac{1}{1+x^2} = f(x)$. f er integrabel idet den er målelig (da kontinuert) og

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = [\arctan(x)]_{-\infty}^{\infty} = \pi < \infty \tag{1}$$

Dvs. f er en integrabel majorant for funktionsfølgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hvor $f_n(x) = \frac{\cos(\sqrt{1+x^2/n})}{1+x^2}$. Der gælder at f_n er målelig for alle n (da f_n er kontinuert) og desuden gælder at $f_n(x) \to \frac{\cos(1)}{1+x^2}$ punktvis for $n \to \infty$. Lebesgues majorantsætning giver derfor at

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\sqrt{1+x^2/n})}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(1)}{1+x^2}dx = \cos(1)\pi \tag{2}$$

Her følger sidste lighedstegn af (1).

OPGAVE 6:
i) For $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi$ gælder at $|\cos(x)| < 1$ og derfor vil $|\cos(x)|^n \to 0$ for $n \to \infty$. For $x \in \mathbb{Z}\pi$ er $|\cos(x)| = 1$ og derfor vil $|\cos(x)|^n$ ikke konvergere mod 0 når $n \to \infty$. Men mængden $\mathbb{Z}\pi$ er en m–nulmængde, da den er tællelig, dvs. $|\cos(x)|^n \to 0$ m–n.o.
ii) Vi sætter $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}([-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] + n\pi) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi]$. A er en Borelmængde da den er en tællelig forening af afsluttede intervaller og da disse intervaller er disjunkte gælder at

$$m(A) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{4}+n\pi, \frac{\pi}{4}+n\pi]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m([-\frac{\pi}{4}+n\pi, \frac{\pi}{4}+n\pi]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\pi}{2} = \infty \tag{3}$$

iii) Vi får oplyst at $|\cos(x)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}1_A(x)$ for $x \in \mathbb{R}$. Dermed gælder for et vilkårligt $n \in \mathbb{N}$ at

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\cos(x)|^n dx \geq \int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n 1_A(x)dx = (\frac{\sqrt{2}}{2})^n m(A) = \infty \tag{4}$$

Dermed gælder altså *ikke* at $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\cos(x)|^n dx = 0$.