Vejledende besvarelse af opgave 4 og 5 fra eksamen maj 2000

Rasmus Ejlers Møgelberg

6. maj 2001

Opgave 4

(i) Vi skal vise at der ved:

$$\mu(E) = \int_E t^2 dm(t)$$

defineres et mål på $\mathbb{R}$ med Borelalgebraen. Hvis vi definerer $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $\phi(t) = t^2$ er ϕ kontinuert og positiv, og derfor $\phi \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, og μ er da blot Lebesguemålet med tæthed ϕ (ofte betegnet $\phi \cdot m$) som defineret på side 4.18 i noterne.

(ii) Nu skal vi bestemme $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$, hvor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er defineret ved:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } -5 \leq x < 0 \\ 2 & \text{hvis } 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{hvis } x < -5 \text{ eller } x > 7 \end{cases}$$

Bemærk at $f = 1_{[-5,0[} + 2 * 1_{[0,7]}$, hvor 1_A betegner indikatorfunktionen for mængden A. De definerende egenskaber for integralet (hovedsætning 4.2 egenskaber (i) og (ii)) giver nu at:

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \mu([-5,0[) + 2 * \mu([0,7])$$

Regnes på dette fås:

$$\int_{-5}^{0} t^2 dt + 2 \int_{0}^{7} t^2 dt = \left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_{-5}^{0} + 2\left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_{0}^{7} = \tfrac{1}{3}(125 + 686) = \frac{811}{3}$$

Opgave 5

Lad C være enhedscirklen i $\mathbb{R}^2$, dvs. $C = \{(x,y)|x^2+y^2=1\}$. Vi skal vise at $m_2(C) = 0$. Bemærk at C er afsluttet og derfor målelig. Korollar 6.10 giver:

$$m_2(C) = \int_{\mathbb{R}} m(C_x)dx$$

hvor C_x betegner snitmængden $\{y|(x,y) \in C\}$. Bemærk at C_x er tom for $x < -1$ og $x > 1$, samt at for $x = \pm 1$ er $C_x = \{0\}$ og for $-1 < x < 1$ består C_x af to punkter. Dvs. at C_x altid er endelig og derfor er $m(C_x) = 0$ for alle x. Nu har vi:

$$m_2(C) = \int_{\mathbb{R}} m(C_x)dx = \int_{\mathbb{R}} 0dx = 0$$