# Januar 2000 opgave 2 og 3

Jakob Stubgaard

14. maj 2001

Opgave2:
Vi kan f.eks. skrive

$$E = (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \tag{1}$$

Mængden $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ er en Borelmængde i $\mathbb{R}^2$ den både $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ er Borelmængder i $\mathbb{R}$ (se nederst side 6.3). Tilsvarende med $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$. Da $E$ således er en forening af to Borelmængder er $E$ en Borelmængde. Endvidere gælder at $m_2(E) = 0$ idet

$$m_2(E) \leq m_2(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) + m_2(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) = m_1(\mathbb{Q})m_1(\mathbb{R}) + m_1(\mathbb{R})m_1(\mathbb{Q}) = 0 \tag{2}$$

Det sidste lighedstegn følger af at $\mathbb{Q}$ er en Lebesgue nulmængde og det næstsidste lighedstegn følger af definitionen af produktmål idet $m_2 = m_1 \otimes m_1$ (sætning 6.9).

Opgave 3:
(i) Lad $n \in \mathbb{N}$. Da $f$ er kontinuert er mængden $A_{1,n} = \{x \mid |f(x)| \leq n\}$ afsluttet og derfor en Borelmængde. Tilsvarende er mængderne $A_{2,n} = \{x \mid f(x) > n\}$ og $A_{3,n} = \{x \mid f(x) < -n\}$ Borelmængder da de er åbne. Restriktionen af $f$ til disse tre mængder, betegnet $f_{n,i}$, er stadig kontinuert og derfor er $f_{n,i}$ $\mathbb{B}_{A_{i,n}}$–$\mathbb{B}$ målelig. Tuborglemmaet (sætning 2.13) giver nu at $f_n$ er målelig.
(ii) Ifølge (i) er $|f_n| \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ og der gælder klart at $|f_n| \nearrow |f|$ punktvis. Monotinisætningen giver derfor at $\int_{\mathbb{R}} |f_n| dm \nearrow \int_{\mathbb{R}} |f| dm$ og da følgen $(\int_{\mathbb{R}} |f_n| dm)_n$ er voksende er

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |f_n| dm = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| dm = \int_{\mathbb{R}} |f| dm \tag{3}$$

Ifølge antagelsen gælder dermed at $\int_{\mathbb{R}} |f| dm < \infty$, dvs. $f$ er integrabel (sætning 4.11).
(iii) Antager vi at $f$ er integrabel så giver sætning 4.11 at $\int_{\mathbb{R}} |f| dm < \infty$ og (3) giver derfor at svaret på spørgsmålet er ja.