

## Opgave 0.3

Jakob Stubgaard

9. februar 2001

Lad  $A$  og  $B$  være delmængder af en mængde  $X$  og lad  $(A_j)_{j \in J}$  være en familie af delmængder af  $X$ .

For at løse opgaven er det nok at vise følgende identiteter:

$$1 = 1_A + 1_{\mathcal{C}A} \quad (1)$$

$$1_{A \cup B} + 1_{A \cap B} = 1_A + 1_B \quad (2)$$

$$1_{\cup_j A_j} = \sup_j 1_{A_j} \quad (3)$$

$$1_{\cap_j A_j} = \inf_j 1_{A_j} \quad (4)$$

Ad 1:

Lad  $x \in X$  være vilkårlig. Hvis  $x \in A$  så er  $1_A(x) = 1$  og  $1_{\mathcal{C}A}(x) = 0$ , og hvis  $x \notin A$  gælder omvendt at  $1_A(x) = 0$  og  $1_{\mathcal{C}A}(x) = 1$ , hvilket viser det ønskede.

Ad 2:

Lad  $x \in X$  være vilkårlig. Hvis  $x \in A$  har vi to muligheder: Hvis  $x \in B$ , så tilhører  $x$  altså  $A \cap B$  og begge sider i (2) giver derfor 2. Hvis derimod  $x \notin B$ , så giver begge sider i (2) 1.

Antages dernæst at  $x \notin A$ , så er  $1_{A \cap B}(x) = 1_A(x) = 0$  og det ses let at (2) er opfyldt (begge sider giver 1 hvis  $x \in B$  og 0 ellers).

Ad 3:

Lad  $x \in X$ . Vi deler da i to tilfælde: Hvis  $x \in \cup_j A_j$  (dvs. venstresiden i (3) er lig 1) så findes altså et  $j_0$  så  $x \in A_{j_0}$  og dermed bliver  $\sup_j 1_{A_j}(x) = 1$  som ønsket. Hvis omvendt  $x \notin \cup_j A_j$  (dvs. venstresiden i (3) er lig med 0) så gælder altså for alle  $j$  at  $x \notin A_j$  og derved bliver også  $\sup_j 1_{A_j}(x) = 0$ .

Ad 4:

Lad  $x \in X$ . Igen deles i to tilfælde: Hvis  $x \in \cap_j A_j$  (dvs. venstresiden i (4) er lig 1) så gælder at  $x \in A_j$  for alle  $j$  og derfor er  $1_{A_j}(x) = 1$  for alle  $j$ , dvs.  $\inf_j 1_{A_j}(x) = 1$ .

Hvis omvendt  $x \notin \cap_j A_j$  (dvs. venstresiden i (4) er lig 0) så findes et  $j_0$  så  $x \notin A_{j_0}$  og derfor er  $1_{A_{j_0}}(x) = 0$ . Dermed bliver  $\inf_j 1_{A_j}(x) = 0$ .