Opgave 0.3

Jakob Stubgaard

9. februar 2001

Lad A og B være delmængder af en mængde X og lad $(A_j)_{j\in J}$ være en familie af delmængder af X.
For at løse opgaven er det nok at vise følgende identiteter:

$$1 = 1_A + 1_{\complement A} \tag{1}$$

$$1_{A\cup B} + 1_{A\cap B} = 1_A + 1_B \tag{2}$$

$$1_{\cup_j A_j} = \sup_j 1_{A_j} \tag{3}$$

$$1_{\cap_j A_j} = \inf_j 1_{A_j} \tag{4}$$

Ad 1:
Lad $x \in X$ være vilkårlig. Hvis $x \in A$ så er $1_A(x) = 1$ og $1_{\complement A}(x) = 0$, og hvis $x \notin A$ gælder omvendt at $1_A(x) = 0$ og $1_{\complement A}(x) = 1$, hvilket viser det ønskede.
Ad 2:
Lad $x \in X$ være vilkårlig. Hvis $x \in A$ har vi to muligheder: Hvis $x \in B$, så tilhører x altså $A \cap B$ og begge sider i (2) giver derfor 2. Hvis derimod $x \notin B$, så giver begge sider i (2) 1.
Antages dernæst at $x \notin A$, så er $1_{A\cap B}(x) = 1_A(x) = 0$ og det ses let at (2) er opfyldt (begge sider giver 1 hvis $x \in B$ og 0 ellers).
Ad 3:
Lad $x \in X$. Vi deler da i to tilfælde: Hvis $x \in \cup_j A_j$ (dvs. venstresiden i (3) er lig 1) så findes altså et j_0 så $x \in A_{j_0}$ og dermed bliver $\sup_j 1_{A_j}(x) = 1$ som ønsket. Hvis omvendt $x \notin \cup_j A_j$ (dvs. venstresiden i (3) er lig med 0) så gælder altså for alle j at $x \notin A_j$ og derved bliver også $\sup_j 1_{A_j}(x) = 0$.
Ad 4:
Lad $x \in X$. Igen deles i to tilfælde: Hvis $x \in \cap_j A_j$ (dvs. venstresiden i (4) er lig 1) så gælder at $x \in A_j$ for alle j og derfor er $1_{A_j}(x) = 1$ for alle j, dvs. $\inf_j 1_{A_j}(x) = 1$.
Hvis omvendt $x \notin \cap_j A_j$ (dvs. venstresiden i (4) er lig 0) så findes et j_0 så $x \notin A_{j_0}$ og derfor er $1_{A_{j_0}}(x) = 0$. Dermed bliver $\inf_j 1_{A_j}(x) = 0$.