Vejledende besvarelse af opgave 3.3

Rasmus Ejlers Møgelberg

13. februar 2001

Vi skal vise at $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ defineret ved:

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{når } E \text{ er endelig eller numerabel} \\ \infty & \text{ellers} \end{cases}$$

er et mål i X. Først bemærkes at $\mathcal{P}(X)$ er en σ-algebra, så $(X, \mathcal{P}(X))$ er et målbart rum. Nu skal blot eftervises de to betingelser (i) og (ii) i definition 3.1.

Den tomme mængde er endelig, så $\mu(\emptyset) = 0$, hvilket viser (i). For at vise (ii), antag at $E_1, E_2, \ldots$ er en følge af parvist disjunkte delmængder af X. Antag først at alle mængderne i følgen er tællelige (dvs. endelige eller numerable). Da er også $\cup_{i=1}^{\infty} E_i$ tællelig og

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0 = \Sigma_{i=1}^{\infty} 0 = \Sigma_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Antag modsat at mindst en af mængderne i følgen er overtællelig. Da er foreningen af alle mængderne i følgen også overtællelig og

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \infty = \Sigma_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Dette beviser at μ er et mål.