Opgave 0.9

Jakob Stubgaard

22. februar 2001

Lad (a_n) være en talfølge i $\overline{\mathbb{R}}$. Da defineres tallene $\liminf_n a_n$ og $\limsup_n a_n$ (som kan være $\pm\infty$) ved udtrykkene
$\liminf_n a_n = \sup_{p\geq 1} \inf\{a_n|n \geq p\} = \lim_p(\inf\{a_n|n \geq p\})$
$\limsup_n a_n = \inf_{p\geq 1} \sup\{a_n|n \geq p\} = \lim_p(\sup\{a_n|n \geq p\})$
Med disse definitioner skal vi vise følgende sætning:

Sætning 0.1. *Talfølgen (a_n) er konvergent i $\overline{\mathbb{R}}$ hvis og kun hvis* $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n$*. Og som det fremgår af beviset er grænseværdien (som kan være $\pm\infty$) i bekræftende fald givet som*
$\lim_n a_n = \liminf_n a_n = \limsup_n a_n$

Bevis. Antag først at følgen er konvergent med grænseværdi a. Vi deler da op i de tre tilfælde $a \in \mathbb{R}$, $a = \infty$ og $a = -\infty$.
Hvis vi først antager at $a \in \mathbb{R}$, så gælder, at der for et vilkårligt $\epsilon > 0$, findes et $N \in \mathbb{N}$ så $|a - a_n| \leq \epsilon$ for alle $n \geq N$. Dermed gælder altså for alle $n \geq N$ at $a_n \in [a - \epsilon, a + \epsilon]$. Dermed må også $\inf\{a_n|n \geq p\}$ og $\sup\{a_n|n \geq p\}$ tilhøre intervallet $[a-\epsilon, a+\epsilon]$ for alle $p \geq N$. Dvs. talfølgerne $(\inf\{a_n|n \geq p\})_p$ og $(\sup\{a_n|n \geq p\})_p$ konvergerer mod a og disse talfølgers grænseværdier er jo netop $\liminf_n a_n$ hhv. $\limsup_n a_n$.
Dernæst antager vi at $a = \infty$, og lader $M > 0$ være givet. Hvis vi kan vise at $\liminf_n a_n \geq M$ kan vi deraf slutte, da M er vilkårligt, at $\liminf_n a_n = \infty$. Endelig slutter vi at også $\limsup_n a_n = \infty$, da $\liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n$.
Vi skal altså vise at $\liminf_n a_n \geq M$. Da $a_n \to \infty$ for $n \to \infty$ kan vi finde et $N \in \mathbb{N}$ således at $a_n \geq M$ for alle $n > N$. For alle $p > N$ gælder derfor at $\inf\{a_n|n \geq p\} \geq M$, dvs. $\liminf_n a_n \geq M$.
Tilsvarende vises i tilfældet $a = -\infty$, at også $\limsup_n a_n = -\infty$ og dermed vil også $\liminf_n a_n = -\infty$ idet $\liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n$.

Antages nu at $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n = L$, så skal det vises at følgen (a_n) er konvergent. Hertil kan man evt. benytte følgende egenskaber ved $\liminf$ og $\limsup$ (vi skal kun bruge 2 af dem, men jeg synes at de tilsammen giver en god karakterisering af $\liminf$ og $\limsup$):
1a: Hvis $c > \limsup_n a_n$ så er der kun endeligt mange $n \in \mathbb{N}$ for hvilke $a_n \geq c$
(dvs. $\exists N \in N \forall n > N : a_n < c$).
Hvis nemlig $a_n \geq c$ for uendeligt mange n så er $\sup\{a_n|n \geq p\} \geq c$ for alle p og derved må $\limsup_n a_n \geq c$.
1b: Hvis $c < \limsup_n a_n$ så er der uendeligt mange $n \in \mathbb{N}$ for hvilke $a_n > c$ (dvs. $\forall n \exists p : a_{n+p} > c$).
Hvis nemlig $a_n > c$ for kun endeligt mange n så er $\sup\{a_n|n \geq p\} \leq c$ for p stor nok og derved må $\limsup_n a_n \leq c$.
Helt tilsvarende kan man vise at der for $\liminf$ gælder
2a: Hvis $c > \liminf_n a_n$ så er der uendeligt mange $n \in \mathbb{N}$ for hvilke $a_n < c$ (dvs. $\forall n \exists p : a_{n+p} < c$).
2b: Hvis $c < \liminf_n a_n$ så er der kun endeligt mange $n \in \mathbb{N}$ for hvilke $a_n \leq c$
(dvs. $\exists N \forall n > N : a_n > c$).

Som ovenfor deler vi i tre tilfælde $L \in \mathbb{R}$, $L = \infty$ og $L = -\infty$.
Vi antager først at $L \in \mathbb{R}$, og lader $\epsilon > 0$ være vilkårligt. Da $L + \epsilon > L = \limsup_n a_n$ giver 1a, at der kun er endeligt mange $n \in \mathbb{N}$ med $a_n \geq L + \epsilon$, dvs. der findes et $N_1 \in \mathbb{N}$ så $a_n < L + \epsilon$ for alle $n > N_1$. Tilsvarende giver egenskab 2b (med $c = L - \epsilon$) at der findes et $N_2 \in \mathbb{N}$ så $L - \epsilon < a_n$ for alle $n > N_2$. Men så er $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$ for alle $n > N = \max\{N_1, N_2\}$, dvs. $a_n \to L$ for $n \to \infty$.
Antages dernæst at $L = \infty$, så er specielt $\liminf_n a_n = \infty$ og egenskab 2b giver derfor at der for alle $M \in]0; \infty[$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så $a_n > M$ for alle $n > N$. Men dette betyder jo præcist at $a_n \to \infty = L$ for $n \to \infty$.
Endelig udnyttes egenskab 1a til, på tilsvarende måde, at vise tilfældet $L = -\infty$. $\square$