Vejledende besvarelse af opgave 3.13

Rasmus Ejlers Møgelberg

1. marts 2001

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, og antag for funktioner fra X ind i $\mathbb{R}$ at $f_n \to f$ μ-n.o. samt $h_n = f_n$ μ-n.o. og $h = f$ μ-n.o. . Vi skal vise at $h_n \to h$ n.o..

Antagelsen $h_n = f_n$ n.o. betyder at der eksisterer nulmængder A_n, så $h_n(x) = f_n(x)$ for $x \in X \setminus A_n$. Ligeledes eksisterer nulmængder B og C så $f_n(x) \to f(x)$ for alle $x \in X \setminus B$ og $f(x) = h(x)$ for $x \in X \setminus C$. Nu gælder klart at for $x \in X \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup B \cup C)$ at $h_n(x) = f_n(x) \to f(x) = h(x)$, så hvis vi blot kan vise at $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup B \cup C$ er en nulmængde har vi vist det ønskede. Dette følger af følgende lemma:

Lemma 1. *En tællelig forening af nulmængder er igen en nulmængde.*

Bevis: Antag $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en følge af nulmængder i X med hensyn til målet μ. Vi ved ikke nødvendigvis at hvert U_n er målelig, men vi ved at der findes målelige mængder V_n så $U_n \subseteq V_n$ og $\mu(V_n) = 0$. Nu er $\cup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ og

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} V_n) \leq \Sigma_{n\in\mathbb{N}} \mu(V_n) = 0$$

Så $\cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ er en nulmængde som ønsket.