3MI-eksamen — Forårspensum — 4. januar 2001

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Opgavesættet er på 3 sider og består af 7 opgaver.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter er med alle sædvanlige hjælpemidler. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af stilopgaven (Opgave 1). Opgave 1 vægtes med 90 point, og de øvrige opgaver (Opgave 2 – 7) vægtes med tilsammen 90 point.

Opgave 1 — stilopgave (90 point)

Carathéodory's Sætning.

Din besvarelse skal indeholde:

- En definition af begrebet et *ydre mål* μ^*,
- En definition af μ^*-målelige mængder (hvor μ^* er et ydre mål).
- En formulering af Carathéodory's Sætning.
- Et bevis for Carathéodory's Sætning.

(Sidste punkt tæller 70 % af stilopgaven.)

Du kan uden bevis benytte det lemma fra noterne, som siger, at hvis $\mathcal{A}$ er en familie af delmængder af en mængde X, således at $\mathcal{A}$ udgør en algebra, og $\mathcal{A}$ er afsluttet under tællelige disjunkte foreninger (dvs. for alle følger $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ af parvis disjunkte mængder i $\mathcal{A}$ gælder $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$), da er $\mathcal{A}$ en σ-algebra.

Undervejs skal du bevise, at hvis $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en følge af parvis disjunkte μ^*-målelige mængder, hvis $F_n = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$, og hvis $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, så gælder identiteterne

$$\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j), \tag{1}$$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap \complement F) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F), \tag{2}$$

for alle $A \in P(X)$.

Opgave 2 (10 point) Bestem grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\Big(\frac{x^2+7n}{n}\Big)e^{-|x|}dx.$$

Du skal argumentere omhyggeligt for hvert skridt.

Opgave 3 (20 point) Lad $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,0[,\\ -2, & x\in[0,4],\\ 0, & x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]4,\infty[,\end{cases}$$

Lad m være det sædvanlige Lebesguemål på $\mathbb{R}$, lad ε_0 være Dirac målet i 0 på $\mathbb{R}$, og lad μ være tællemålet på $\mathbb{R}$.

(i) Gør rede for, at f er en Borel funktion.

(ii) Afgør om $f\in\mathcal{L}(m)$, afgør om $f\in\mathcal{L}(\varepsilon_0)$, og afgør om $f\in\mathcal{L}(\mu)$.

(iii) Bestem de af nedenstående integraler som er definerede (jvf. spørgsmål (ii)):

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dm,\qquad \int_{\mathbb{R}} f\,d\varepsilon_0,\qquad \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu.$$

Opgave 4 (15 point) Lad $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Gør rede for, at de to dobbeltintegraler nedenfor er veldefinerede og lig med hinanden for alle endelige positive tal N, M.

$$\int_{-N}^{N}\Big(\int_{-M}^{M} f(x,y)dx\Big)dy,\qquad \int_{-M}^{M}\Big(\int_{-N}^{N} f(x,y)dy\Big)dx.$$

Opgave 5 (15 point) Vis at

$$\Big|\int_0^1 xf(x)dx\Big|\le\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\int_0^1|f(x)|^2dx\Big)^{1/2}$$

for alle $f\in\mathcal{L}^2([0,1],m)$.

Opgave 6 (15 point) Lad μ være målet på $\mathbb{R}$ givet ved

$$\mu(E) = \int_E e^x \, dx,$$

og lad m være det sædvanlige Lebesguemål på $\mathbb{R}$. Betragt delmængden

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

af $\mathbb{R}^2$.

(i) Bestem snittet E_x for hvert x i $\mathbb{R}$.

(ii) Bestem $(m \otimes \mu)(E)$.

Opgave 7 (15 point) Lad E være delmængden af $\mathbb{R}^2$ givet ved

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Q}\}.$$

Gør rede for, at E er en Borel mængde og bestem $m_2(E)$.