Om opgaverne 1.4 og 1.11 — Hold 9

Opgave 1.4:

Vi skal vise
$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(w,y)$$
for x, y, z, w punkter i et metrisk rum (M, d). Det kommer jo ud på at vise

$$\begin{aligned} d(x,y) - d(z,w) &\leq d(x,z) + d(w,y) \\ d(z,w) - d(x,y) &\leq d(x,z) + d(w,y) \end{aligned}$$

og her følger fx det andet udsagn ved

$$\begin{aligned} d(z,w) &\leq d(z,y) + d(y,w) && \text{[M3]} \\ &\leq d(z,x) + d(x,y) + d(y,w) && \text{[M3]} \\ &= d(x,z) + d(w,y) + d(x,y) && \text{[M2]}. \end{aligned}$$

Vi anvender nu dette til at vise at hvis $x_n \to x$ og $y_n \to y$ i (M, d), så vil $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ i $\mathbb{R}$ med den sædvanlige norm, når $n \to \infty$. Vi har jo

$$0 \leq |d(x,y) - d(x_n, y_n)| \leq d(x, x_n) + d(y, y_n)$$

ved første del af opgaven (og [M2]), så da højresiden går mod nul pr. antagelse, så gælder
$$|d(x,y) - d(x_n, y_n)| \to 0, \qquad n \to \infty$$
Det betyder netop at $d(x_n, y_n)$ konvergerer mod $d(x, y)$.

Opgave 1.11:

Vi viser at

(i) (x_n) konvergerer mod a.

(ii) Enhver delfølge af (x_n) har en delfølge, der konvergerer mod a.

er ækvivalente udsagn.

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Antag at $x_n \to a$ og lad en delfølge x_{n_p} være given. Vi skal finde en delfølge af x_{n_p} der konvergerer mod a, men ved observation øverst side 1.8 vil x_{n_p} selv konvergere mod a. Som konvergent delfølge kan vi altså vælge (x_{n_p}) selv.

$(ii) \Longrightarrow (i)$. Vi viser $\neg(i) \Longrightarrow \neg(ii)$. Antag således at $x_n \not\to a$. Det betyder jo

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : d(x_n, a) \geq \varepsilon. \tag{1}$$

Vi ser at for et sådant ε er der en delfølge x_{n_p} med egenskaben

$$d(x_{n_p}, a) \geq \varepsilon$$

(vi skal bruge uendelig mange elementer til at lave delfølgen, og det får vi ved at først vælge $n_1 = n$ i (1) for $N = 1$, og så $n_2 = n$ i (1) for $N = n_1$ osv. osv.) Denne delfølge har ingen delfølge $(x_{n_{p_q}})$ der konvergerer mod a, for så skulle der jo gælde $d(x_{n_{p_q}}, a) < \varepsilon$ for q større end et passende Q.

2AN/e96/37/SE