Om opgaverne 1.12, 2.7 og 2.8 Hold 9

Opgave 1.12:

Vi definerer en afbildning på $\mathcal{C}([a,b])$ ved

$$f \mapsto \|f'\|_u .$$

Bemærk at for at definitionen har mening skal f' være en begrænset funktion! Men den er kontinuert på et begrænset interval. At denne afbildning er en seminorm følger nu af at $\|\cdot\|_u$ er en norm og de velkendte regler

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f'.$$

Bemærk endelig at alle konstante funktioner sendes i nul ved denne afbildning, så seminormen er ikke en norm.

Nu definerer vi

$$\|f\| = \|f\|_u + \|f'\|_u$$

og checker uden videre at vi herved får en seminorm. Men dette er faktisk en norm, da $\|f\| = 0 \Longrightarrow \|f\|_u = 0 \Longrightarrow f = 0$. Vi har

$$\begin{aligned}
f_n \to f \text{ i } \|\cdot\| &\iff \|f_n - f\| \to 0 \\
&\iff \|f_n - f\|_u + \|f_n' - f'\|_u \to 0 \\
&\iff \|f_n - f\|_u \to 0 \text{ og } \|f_n' - f'\|_u \to 0 \\
&\iff f_n \to f \text{ i } \|\cdot\|_u \text{ og } f_n' \to f' \text{ i } \|\cdot\|_u
\end{aligned}$$

og det sidste udsagn er netop definitionen af at f_n og f_n' konvergerer uniformt mod f og f'. Om den tredje biimplikation: "$\Longleftarrow$" er kontinuitet af addition, jf. s. 3.8; "$\Longrightarrow$" fås ved vurdering, fx

$$0 \leq \|f_n - f\|_u \leq \|f_n - f\|_u + \|f_n' - f'\|_u .$$

Opgave 2.7:

Vi skal først vise

(1) $\overline{K(a,r)} \subseteq \{x \in M \mid d(x,a) \leq r\}$

(2) $\{x \in M \mid d(x,a) \leq r\}$ er afsluttet.

Det er klart at højresiden i (1) indeholder $K(a,r)$, så ved karakteriseringen af $\overline{K(a,r)}$ som den mindste afsluttede mængde der indeholder $K(a,r)$ følger (1) altså af (2). For at vise (2) tager vi en følge (x_n) i $\{x \in M \mid d(x,a) \leq r\}$ og antager at $x_n \to y$ i (M,d). Vi viste i Opgave 1.4 at

$$d(x_n,a) \to d(y,a), \qquad n \to \infty$$

så da $d(x_n,a) \leq r$ gælder der også $d(y,a) \leq r$. Altså vil $y \in \{x \in M \mid d(x,a) \leq r\}$ som ønsket.

- Der er tilfælde hvor der ikke gælder "=" i (1). Fx hvis (M,d) er et diskret metrisk rum; så er
$$\overline{K(a,1)} = \overline{\{a\}} = \{a\},$$
fordi $\complement\{a\} = \bigcup_{x \neq a}\{x\} = \bigcup_{x \neq a} K(x,a)$ er åben som en uendelig forening af åbne mængder. Men $\{x \in M \mid d(x,a) \leq 1\} = M$ da den diskrete metrik aldrig antager større værdier end 1.

- Der er imidlertid mange interessante tilfælde hvor der gælder "=" i (1). Fx når vi taler om et normeret vektorrum $(X, \|\cdot\|)$. Vi skal vise
$$\overline{K(a,r)} \supseteq \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\} = \{x \in X \mid \|x-a\| \leq r\}.$$
Vælg altså x indeholdt i mængden til højre, dvs. med $\|x-a\| \leq r$. Vi finder en følge x_n fra $K(a,r)$ der konvergerer mod x, nemlig
$$x_n = a + (1 - \tfrac{1}{n})(x-a).$$
Det er jo klart at $x_n \to x$, og vi har $x_n \in K(a,r)$ da
$$\|a - x_n\| = \left\|(1-\tfrac{1}{n})(x-a)\right\| = (1-\tfrac{1}{n})\,\|x-a\| \leq (1-\tfrac{1}{n})r < r.$$

Opgave 2.8:

Vores lille mellemværende var at vise at med A som defineret i opgaven (følgerne der er nul f.v.t.), så er A tæt i ℓ^1 i både $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_u$.

Jeg viser kun den første påstand – check selv den anden! Lad et vilkårligt $\underline{a} = (a_n) \in \ell^1$ være givet; vi skal vise at det ligger i afslutningen af A under $\|\cdot\|_1$. Ideen er at betragte "trunkerede"[1] følger

$$\underline{a}_N = (a_1, \ldots, a_N, 0, 0, 0, \ldots)$$

og vise at $\|\underline{a} - \underline{a}_N\|_1 \to 0$. Da det er klart at $\underline{a}_N \in A$ har vi så vist det ønskede. Og

$$\|\underline{a} - \underline{a}_N\|_1 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \to 0$$

pr. definition af hvad det vil sige at $(a_n) \in \ell^1$.

2AN/e96/38/SE

[1]Ordvalget "kuperet" havde måske været bedre, hvis det får nogen til at associere til hundehaler