Om opgaverne 2.11 og 3.6 — samt 3.1(b) Hold 9

Resultat af rundspørge

- Opgave 1.12: Gennemsnitligt tidsforbrug <u>8.6</u> minutter.

  12 Fik aldrig kikket på den
  3 Så på den, men kom ikke i gang
  1 Kom i gang, men stødte på problemer de ikke kunne løse
  0 Fik den næsten regnet, men ikke skrevet rent
  1 Afleverede
  1 Andet

- Opgave 2.7: Gennemsnitligt tidsforbrug <u>15.3</u> minutter.

  12 Fik aldrig kikket på den
  2 Så på den, men kom ikke i gang
  2 Kom i gang, men stødte på problemer de ikke kunne løse
  0 Fik den næsten regnet, men ikke skrevet rent
  1 Afleverede
  1 Andet

Regneregler om urbillede

Lad $f : X \to Y$ være en afbildning og lad $A \subseteq X$ og $B, B', B_i \subseteq Y$. Vi har da:

(i) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

(ii) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

(iii) $f^{-1}(\complement B) = \complement f^{-1}(B)$.

(iv) $B \subseteq B' \Longrightarrow f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$

(v) $A \subseteq f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(A) \subseteq B$

(vi) $B \supseteq f(f^{-1}(B))$.

(vii) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Opgave 2.11:

Antag at $x_n \to x_\infty$ i et metrisk rum (M, d). Vi sætter

$$F = \{x_n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$$

og ønsker at vise at F er afsluttet. Lad os tage en følge (y_m) fra F og antage at $y_m \to z$. Det er så vores opgave at vise at $z \in F$. Bemærk nu: (y_m) *er ikke en delfølge af* (x_n). Det kunne jo være følgen

$$x_{103}, x_\infty, x_{34}, x_{34}, x_{10^{10}}, x_1, x_2, x_{10^{11}}, \ldots$$

Man må derfor argumentere meget forsigtigt når man vil knytte (y_m) til (x_n).

Vi kan skrive

$$y_m = x_{\nu(m)}$$

hvor $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ er en afbildning. [Fx er $\nu(3) = 34$ i eksemplet herover]. Hvis $z = x$ er vi færdige, så lad os antage at $z \neq x$. Det betyder at $s = d(x, z)/2 > 0$. Så har vi

$$K(x, s) \cap K(z, s) = \emptyset \tag{1}$$

ved kuglelemmaet. Da $x_n \to x$ har vi

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : x_n \in K(x, s) \tag{2}$$

Da $y_m \to z$ har vi

$$\exists M \in \mathbb{N} \forall m > M : y_m = x_{\nu(m)} \in K(z, s). \tag{3}$$

Sammensætter vi informationerne i (1), (2) og (3) får vi at $\nu(m) < N$ når $m > M$. Det betyder at $\nu(\mathbb{N})$ kun indeholder endelig mange tal. Men så er (y_m) en følge der forløber i mængden $F' \subseteq F$ bestående af de endelig mange x_n hvor $n \in \nu(\mathbb{N})$. En endelig mængde er afsluttet, så F' er afsluttet. Altså vil $z \in F' \subseteq F$, og vi har vist det ønskede.

Opgave 3.6:

Vi sætter

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

og vil vise

(a) $d(\cdot, A)$ er afstandsformindskende [og dermed kontinuert].

(b) $d(x, A) = 0$ netop når $x \in \overline{A}$.

(c) Når F er en afsluttet mængde findes der en følge G_n af åbne mængder med $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = F$.

(d) $f : X \to Y$ er kontinuert i x_0 præcis når

$$d(x_0, A) = 0 \Longrightarrow d(f(x_0), f(A)) = 0$$

for alle ikke-tomme delmængder A af X.

Bevis for (a): At være Lipschitz med konstant 1 oversættes ved

$$|d(x_1, A) - d(x_2, A)| \le 1 \cdot d(x_1, x_2)$$

vi bruger jo metrikken $d_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$ på billedmængden for vores afbildning. Det er nok at vise

$$d(x_1, A) - d(x_2, A) \le d(x_1, x_2)$$

ved symmetri og [M2]. Vi skriver det om til

$$d(x_1, A) - d(x_1, x_2) \le d(x_2, A)$$

og husker på at tallet til højre er det største undertal for mængden $\{d(x_2, a) \mid a \in A\}$. Det er altså nok at vise at tallet til venstre *er* et undertal for $\{d(x_2, a) \mid a \in A\}$. Men for et vilkårligt $a \in A$ har vi jo

$$d(x_1, A) - d(x_1, x_2) \le d(x_1, a) - d(x_1, x_2) \le d(x_2, a)$$

ved en lille omskrivning af trekantsuligheden.

Bevis for (b): Vi har biimplikationsrækken

$$\begin{aligned} d(x, A) = 0 &\iff \forall r > 0 : r \text{ er ikke et undertal for } \{d(x, a) \mid a \in A\} \\ &\iff \forall r \exists a \in A : d(x, a) < r \\ &\iff \forall r : K(x, r) \cap A \neq \emptyset \\ &\iff x \text{ er et kontaktpunkt for } A \\ &\iff x \in \overline{A}. \end{aligned}$$

Bevis for (c): Lad F være givet og lad os skrive

$$f(x) = d(x, F)$$

Så er $f : M \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion, og

$$G_n = f^{-1}(]-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}[)$$

er åben. Men ved regneregler for urbilleder (ii) gælder

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(]-\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n}[) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n}[\right) = f^{-1}(\{0\}) = \overline{F} = F$$

Bevis for (d)"$\Longrightarrow$": Antag først at f er kontinuert i x_0 og at $d(x_0, A) = 0$. Fra (b) ved vi at $x_0 \in \overline{A}$, så vi kan vælge $x_n \in A$ med $x_n \to x_0$. Da f er kontinuert har vi så $f(x_n) \to f(x_0)$, så $f(x_0) \in \overline{f(A)}$ og ved (b) igen får vi $f(x_0) \in f(A)$.

Bevis for (d)"$\Longleftarrow$": Antag så at f ikke er kontinuert i x_0. Det betyder at der findes x_n i M så $x_n \to x_0$ men $f(x_n) \not\to f(x_0)$. Vi har set i tidligere opgave at så findes $\varepsilon > 0$ og en delfølge x_{n_m} med

$$d(x_{n_m}, x_0) \geq \varepsilon, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Sæt $A = \{x_{n_m} \mid m \in \mathbb{N}\}$. Det er klart at $d(f(x_0), f(A)) \geq \varepsilon$, mens $d(x_0, A) = 0$ ved (a).

Opgave 3.1(b) (med urbilleder):

Vi vil vise

$$f \text{ er kontinuert} \Longleftrightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

"$\Longrightarrow$": Da $\overline{f(A)}$ er afsluttet og f er kontinuert, vil $f^{-1}(\overline{f(A)})$ være afsluttet. Vi har $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ da $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$, jf. regneregel om urbilleder (v) herover. Altså er $f^{-1}(\overline{f(A)})$ en afsluttet mængde der indeholder A, så $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Bruges nu (v) igen fås

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

som ønsket.

"$\Longleftarrow$": Lad F være en afsluttet mængde. Vi skal vise at $f^{-1}(F)$ er afsluttet, og det kommer jo ud på

$$\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F). \tag{4}$$

Lad os benytte antagelsen på mængden $A = f^{-1}(F)$. Den giver

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \overline{F} = F$$

hvor vi brugte regel (vi) ved den anden inklusion. Men ved (v) oversættes dette netop til (4).

2AN/e96/39/SE