Om opgaverne 3.9 og 5.4 Hold 9

Opgave 3.9:

Lad $f_n(x) = (\sin x)^{2n}$. Når $x = \frac{\pi}{2} + p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, så er $f_n(x) = 1$ for alle n. For alle andre x er $(\sin x)^2 < 1$, og $f_n(x) \to 0$ når $n \to \infty$. Altså konvergerer f_n punktvis overalt på $\mathbb{R}$, og grænsefunktionen er

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{\pi}{2} + p\pi, p \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{andre } x \end{cases}$$

Hvis f_n konvergerer mod f uniformt kan vi slutte ved Sætning 3.16 at så vil grænsefunktionen f være kontinuert. Vi observerer at det er f **ikke**, så grænseovergangen er altså **ikke** uniform.

Opgave 5.4:

Der ER et element i $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$: Hvis (x_n) er valgt med $x_n \in F_n$, så er (x_n) en Cauchyfølge, altså

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : d(x_n, d_m) < \varepsilon.$$

For givet $\varepsilon > 0$ kan vi nemlig vælge N så $\operatorname{diam} F_N < \varepsilon$. Det følger at for $n, m \geq N$, så er $d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam} F_N < \varepsilon$ fordi $x_n, x_m \in F_N$. Da M er fuldstændigt, vil der findes $x \in M$ så $x_n \to x$.

Givet et vilkårligt fast N er halefølgen $(x_n)_{n \geq N}$ en følge i F_N; da F_N er afsluttet og halefølgen også konvergerer mod x, må $x \in F_N$. Da N var vilkårligt, må $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Der er HØJST et element i $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$: For givet $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ har vi $x, y \in F_n$ for hvert n, og

$$0 \leq d(x, y) \leq \operatorname{diam} F_n \to 0.$$

Da må $d(x, y) = 0$ og $x = y$.

Bemærk! Udsagnet er falsk uden vores antagelse om at (M, d) er fuldstændigt. Lad os fx betragte $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ og

$$F_n = [\sqrt{2} - \tfrac{1}{n}; \sqrt{2} + \tfrac{1}{n}] \cap \mathbb{Q}$$

Da $\operatorname{diam}(F_n) = \frac{2}{n}$ er alle forudsætningerne i opgaven opfyldt, men

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [\sqrt{2} - \tfrac{1}{n}; \sqrt{2} + \tfrac{1}{n}] \right) \cap \mathbb{Q} = \{\sqrt{2}\} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$$

Ethvert argument der ikke benytter forudsætningen om fuldstændighed er således forkert!!!

2AN/e96/40/SE