Om opgaverne 5.1 og 6.3 — Hold 9

Opgave 5.1:

Vi ved fra noternes sætning 6.10 at $M \times M$ er kompakt og fra opgave 4.2 at $d : M \times M \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Ved sætning 6.7 har $d(M \times M)$, billedet af $M \times M$ under metrikken, en størsteværdi. Det er jo præcis det samme som at sige at supremet for $d(\cdot,\cdot)$ over $M \times M$ antages, lad os sige i punktet (a,b). Altså er

$$d(a,b) = \sup\{d(x,y) \mid (x,y) \in M \times M\} = \mathrm{diam}(M).$$

Opgave 6.3:

Antag at følgen (x_n) er en cauchyfølge, dvs

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n,m > N : d(x_n, x_m) < \varepsilon \tag{1}$$

og at den har et fortætningspunkt a, dvs

$$\forall r > 0 : \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(a,r)\} \text{ er uendelig} \tag{2}$$

Vi vil vise at $x_n \to a$, dvs

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : d(x_n, a) < \varepsilon \tag{3}$$

Lad således $\varepsilon > 0$ være givet. Vælg N if. (1) så

$$n, m > N \implies d(x_n, x_m) < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Anvendes nu (2) med $r = \varepsilon/2$ ses at der findes $M > N$ med $d(x_M, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ — der er jo uendelig mange indekser med den sidstnævnte egenskab, så vi kan vælge et der er større end N. Når $n > N$ har vi

$$d(x_n, a) \le d(x_n, x_M) + d(x_M, a) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ved trekantsuligheden og vore antagelser herover, så (3) er vist.

2AN/e96/41/SE