Om obligatorisk opgave, II.1.3 og II.1.7 Hold 9

Obligatorisk opgave 1:

1a(i) Da E er fuldstændigt er det tilstrækkeligt at vise at (s_k) er en cauchyfølge. Vi skal således vise

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k, l \geq N : \|s_k - s_l\| < \varepsilon.$$

1a(ii) Ved gentagen brug af trekantsuligheden har vi

$$\|s_k - s_l\| = \left\| \sum_{n=1}^{k} x_n - \sum_{n=1}^{l} x_n \right\| = \left\| \sum_{n=l+1}^{k} x_n \right\| \leq \sum_{n=l+1}^{k} \|x_n\|$$

hvis $k > l$ (tilfældet $k = l$ er uinteressant, og $k < l$ behandles analogt).

1a(iii) Pr. antagelse vil følgen $t_k = \sum_{n=1}^{k} \|x_n\|$ konvergere. Specielt er følgen cauchy, så vi har

$$(**) \qquad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k, l \geq N : |t_k - t_l| < \varepsilon.$$

Alternativt kan man benytte at der findes N' så $\sum_{n=N'}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon$.

1a(iv) Så er vi klar til at vise (*). Lad $\varepsilon > 0$ være givet og vælg N hertil i (**). Dette N kan benyttes i (*) da vi har

$$\|s_k - s_l\| \leq \sum_{n=l+1}^{k} \|x_n\| = t_k - t_l = |t_k - t_l|$$

idet vi jo antager at $k > l$.

1a(v) Da $\|\cdot\|$ er en kontinuert funktion, har vi

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| = \left\| \lim_{k\to\infty} s_k \right\| = \lim_{k\to\infty} \|s_k\| .$$

1a(vi) Vi har

$$\|s_k\| = \left\| \sum_{n=1}^{k} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{k} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$$

igen ved gentagen brug af trekantsuligheden. Da vil også

$$\lim_{k\to\infty} \|s_k\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| .$$

1b(i) Bemærk først at

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x^2+n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

1b(ii) Da f_n klart er kontinuert har vi altså at $f_n \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ med $\|f_n\|_u \le \frac{1}{n^2}$.

1b(iii) Vi kan anvende **1a** da $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vides at være et banachrum.

1b(iv) Altså er det tilstrækkeligt at vise at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er absolut summabel. Og det følger af

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_u \le \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} = \tfrac{\pi^2}{6} < \infty.$$

1c(i) Vi så i **1b** at rækken konvergerer i $(C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$, så grænsefunktionen f ligger i $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ og er specielt kontinuert.

Et argument vha. sætning 3.16 – kontinuitet bevares under uniform grænseovergang – er bestemt pointudløsende og dybest set påskønnet. Men det er faktisk unødvendigt; det hele er bygget ind i vores bevis for forrige delopgave.

1c(ii) Altså vil

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{x\to 0} f(x),$$

og vi kan bestemme f's værdi i nul ud fra dens værdier i $x \neq 0$, der opgives at være givne ved

$$f(x) = \frac{1}{2x}\left(\frac{\pi}{\sinh \pi x} - \frac{1}{x}\right)$$

1c(iii) Da sinh er en C^∞-funktion kan vi benytte Taylors formel med restled, der efter bestemmelse af de afledede i nul giver at

$$\sinh y = y + \frac{1}{3!}y^3 + E_3(y)$$

hvor restleddet har egenskaben $E_3(y)/y^3 \to 0$, $y \to 0$.

I må lige så gerne benytte L'Hôpitals regel. Men husk så lige at sige noget om differentiabilitet.

1c(iv) Ved det opgivne udtryk for f på $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ har vi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi x - \sinh \pi x}{2x^2 \sinh \pi x} \\ &= \frac{-\frac{1}{6}(\pi x)^3 - E_3(\pi x)}{2\pi x^3 + \frac{2}{6}x^2(\pi x)^3 + 2x^2 E_3(\pi x)} \\ &= \frac{-\frac{1}{6}\pi^3 + E_3(\pi x)/x^3}{2\pi + \frac{\pi^3}{3}x^2 + 2E_3(\pi x)/x}. \end{aligned}$$

Fra vores viden om restleddet har vi

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-\frac{1}{6}\pi^3 + 0}{2\pi^3 + 0 + 0} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Obligatorisk opgave 2:

2(i)
2(i)' Vi vil behandle problemet vha. en matematisk model som følger. Billardbordet beskrives som et afsluttet og begrænset rektangel $K = [0, b] \times [0, \ell]$ i $\mathbb{R}^2$. Projektionen af kuglens centrums bane beskrives som en kontinuert funktion $f : [0, \infty[\to K$. Vi benytter enheden mm for afstand og enheden sekund for tid. Konstanten M betegner tidsrummet en million år.

2(ii) Betragt nu følgen

$$x_n = f(n),$$

dvs. kuglens position hvert hele sekund.

Der er mange måder at vælge x_n. Lidt smartere, men mindre naturligt, er det at se på følgen $x'_n = f(nM)$.

2(iii) Da K er en afsluttet og begrænset delmængde af $\mathbb{R}^2$ har enhver følge, og specielt (x_n), et fortætningspunkt $a \in K$.

2(iv) Punktet a har de ønskede egenskaber. Vi ved jo fra definitionen af fortætningspunkt, at

$$I = \{n \mid x_n \in K(a, 1)\}$$

er en uendelig mængde. Sæt $t_1 = \min I$, og vælg t_2 som et af de uendelig mange hele tal der er større end $t_1 + M$ og ligger i I. Da er $t_2 - t_1 > M$ og $x_{t_1}, x_{t_2} \in K(a, 1)$.

Obligatorisk opgave 2 [alternativ]:

2(ii)' Vi inddeler $\mathbb{R}^2$ i små kvadrater ved at skrive

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Z}} [\tfrac{p}{2}, \tfrac{p+1}{2}[\times [\tfrac{q}{2}, \tfrac{q+1}{2}[$$

Vi bemærker at disse kvadrater ikke overlapper hinanden og at $\operatorname{diam}[\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}[\times [\frac{q}{2}, \frac{q+1}{2}[= \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = 1/\sqrt{2} < 1$. Endvidere er det kun er endelig mange kvadrater (nemlig højst $4LB$, hvor B, L er hele tal større end b, ℓ) der møder K.

2(iii)' Vi nummererer disse endeligt mange kvadrater $1, \ldots, N$ og bemærker at der herved defineres en afbildning $\nu : [0, \infty[\to \{1, \ldots, N\}$ defineret ved at $\nu(t) = n$ hvis $f(t)$ ligger i kvadrat nummer n.

2(iv)' Hvis $\nu^{-1}(\{n\})$ var opad begrænset i $[0, \infty[$ for alle n ville også urbilledet $\nu^{-1}(\{1, \ldots, N\})$ være begrænset i klar modstrid med at ν er defineret på hele $[0, \infty[$. Således findes mindst et n_0 så $\nu^{-1}(\{n_0\})$ er ubegrænset; mao. findes vilkårligt store tidspunkter t

så x_t ligger i kvadrat nummer n_0, og hvis vi fastholder et sådant tidspunkt t_1 kan vi altså vælge endnu et sådant tidspunkt t_2 med $t_2 > t_1 + M$. Som a kan vi vælge et vilkårligt punkt i kvadratet.

Obligatorisk opgave O3:

3(i) Vi betragter funktionen

$$s(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} p(x_1, x_2, x_3) & p(x_1, x_2, x_3) \geq 0 \\ 0 & p(x_1, x_2, x_3) < 0 \end{cases}$$

hvor p er et polynomium i 3 variable. Det er derfor klart at p er kontinuert, men da $s = \max(p, 0)$ er s også kontinuert ved bemærkning side I.3.9.

3(ii) Virksomheden er interesseret i om s har maksimum over mængden

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 10\}$$

da der påtænkes at anvende (positive) beløb der højst må summere til 100000 kr.

3(iii) Mængden A er afsluttet, da vi kan skrive

$$A = [0, \infty[^3 \cap f^{-1}(] - \infty, 10])$$

hvor $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$. Dette fordi alle halvlukkede intervaller er afsluttede og fordi f er kontinuert. Her blev brugt sætningerne I.2.7(iii), I.3.3 og I.4.4(a) fra noterne.

Et fikst alternativ er at benytte at A er den del af den afsluttede $\|\cdot\|_1$-kugle med radius 10 der ligger i den første oktant. Men så skal man enten henvise til opgave I.2.7 eller bemærke at normen her er en kontinuert funktion. Hvis man vælger at regne hele opgaven hvor man bruger 1-normen i stedet for den euklidiske norm skal man lige redegøre for at Sætning I.6.3 gælder ligegyldigt hvilken norm man bruger på $\mathbb{R}^3$. Begrænsethed er jo ikke et topologisk begreb...

3(iv) Mængden A er begrænset, fx fordi $A \subseteq K(0, 18)$. Vi ved jo at

$$\|(x_1, x_2, x_3)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq \sqrt{300} < 18$$

når $(x_1, x_2, x_3) \in A$.

Radius 11 er nok, men det er (lidt) mere besværligt at vise.

3(v) Vi kan nu anvende Sætning I.6.3, der giver at A er en kompakt delmængde af $\mathbb{R}^2$.

3(vi) Således er s en kontinuert funktion defineret på en kompakt mængde, og som sådan har den et maksimum if. sætning I.6.7.

Opgave II.1.3:

Lad $A \subseteq H$ være givet med H et hilbertrum. Vi vil vise at $A^\perp$ er afsluttet, idet der er givet et argument i noterne om at $A^\perp$ er et underrum.

Bevis a: Antag $x_n \in A^\perp$ og at $x_n \to x$ i H. Vi skal vise at $x \in A^\perp$. Givet $a \in A$ skal vi altså indse at $(x, a) = 0$. Men

$$(x, a) = \lim_{n\to\infty} (x_n, a)$$

ved kontinuitet af det indre produkt, så det ønskede følger af at $(x_n, a) = 0$.

Bevis b: Vi har

$$A^\perp = \bigcap_{a\in A} \{a\}^\perp$$

direkte fra definitionen af det ortogonale rum. Ved I.2.7 er det altså nok at vise at $\{a\}^\perp$ er afsluttet for vilkårligt $a \in A$. Men med $f_a(x) = (x, a)$ er f_a jo kontinuert, og vi har

$$\{a\}^\perp = f_a^{-1}(\{0\}),$$

så det følger ved I.3.3.

Opgave II.1.7:

Vi skal blot vise at

$$A(n, m) = \int_0^\pi \sin((n - \tfrac{1}{2})\theta) \sin((m - \tfrac{1}{2})\theta) d\theta = 0$$

når $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Hertil benyttes formlen

$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

der giver

$$A(n, m) = \tfrac{1}{2} \int_0^\pi [\cos((n - m)\theta) + \cos((n + m - 1)\theta)]\, d\theta$$

Da vi imidlertid har

$$\int_0^\pi \cos(k\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ \pi & k = 0 \end{cases}$$

behøver vi blot at checke at hverken $n - m$ eller $n + m - 1$ er nul. Og det er jo klart da $n \neq m$ og $n + m \geq 2$.

PS: Hvis nogen skulle have fået lyst til at høre mere om fourierrækker og deres (manglende) konvergensegenskaber, så kan jeg anbefale

[Kör] Körner, T.W.: Fourier Analysis. Cambridge University Press, 1988.

[Mej] Mejlbro, L.: Mit rædselskabinet. Matematisk Institut, Danmarks Tekniske Højskole, u.å.