Om opgaverne II.2.2 og II.2.9 **Hold 9**

Opgave II.2.2:

Eulers formel for sinus giver

$$\begin{aligned}\sin^3\theta &= \left(\tfrac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right)^3\\ &= \tfrac{1}{8i^3}(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}).\end{aligned}$$

Dette er tydeligvis en ortonormaludvikling for $\sin^3\theta$ i den sædvanlige basis $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$. Men ornormaludviklinger er entydige[1] så der er tale om fourierrækkeudviklingen af $\sin^3$. Vi kan simpelthen aflæse koefficienterne,

$$c_{-3}(\sin^3)=-i/8 \qquad c_{-1}(\sin^3)=3i/8 \qquad c_1(\sin^3)=-3i/8 \qquad c_3(\sin^3)=i/8,$$

og $c_n(\sin^3)=0$ ellers.

Opgave II.2.9:

Vi har allerede set i opgaver og ved øvelserne at $(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ er et ortonormalsystem i $L_2([0,\pi])$. Det nye er at vise at systemet er en basis. Vi kommer ikke udenom at anvende sætning II.2.9 til dette formål.

Lad $f\in\mathcal{L}_2([0,\pi])$ være givet. Vi sætter

$$\tilde f(\theta)=\begin{cases} f(\theta) & \theta\in]0,\pi[\\ 0 & \theta\in\{0,\pi\}\\ -f(-\theta) & \theta\in]-\pi,0[\end{cases}$$

og bemærker at denne funktion er periodisk[2] og ulige. Vi har endda at $\tilde f\in\mathcal{L}_{2,\mathrm{per}}([-\pi,\pi])$ da

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde f(\theta)|^2d\theta = 2\int_0^{\pi}|f(\theta)|^2d\theta<\infty$$

hvor det blev brugt at $|\tilde f|^2$ er en lige funktion og at f og $\tilde f$ stemmer overens næsten overalt på $[0,\pi]$. Altså har vi fra sætning II.2.9 kombineret med 4) i opgave II.2.8

$$\tilde f(\theta)=\tfrac{1}{2}a_0(\tilde f)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(\tilde f)\cos n\theta+b_n(\tilde f)\sin n\theta\right]$$

hvor summen skal opfattes i L_2-forstand (og *ikke i nogen anden* forstand). Ved 3) i opgave II.2.8 er $a_n(\tilde f)=0$ for alle n da $\tilde f$ er ulige. Det betyder at

$$\tilde f(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\tilde f)\sin n\theta$$

[1] Hvis $x=\sum_I\alpha_ie_i$ så er $(x,e_j)=(\sum_I\alpha_ie_i,e_j)=\sum_I(\alpha_ie_i,e_j)=\alpha_j$ og α_j er entydigt bestemt.

[2] Egentlig mener jeg "kan udvides til en periodisk funktion"

igen i L_2-forstand. Altså:

$$\left\| \tilde{f}(\theta) - \sum_{n=1}^{N} b_n(\tilde{f}) \sin n\theta \right\|_2 \to 0, \qquad N \to \infty$$

i $L_2([-\pi,\pi])$. Så er det klart at også

$$\left\| f(\theta) - \sum_{n=1}^{N} b_n(\tilde{f}) \sin n\theta \right\|_2 \to 0, \qquad N \to \infty$$

i $L_2([0,\pi])$, og vi har at f ligger i afslutningen af $\operatorname{span}\{\sin n\theta \mid n \in \mathbb{N}\}$, hvor der her henvises til afslutning i $L_2([0,\pi])$. Pr. definition er $(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ altså en ONB.

Vi kalder ortonormaludviklingen

$$f(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(f) \sin n\theta$$

for *sinusrækken* for f. Vi har set at $b'_n(f) = b_n(\tilde{f})$ og beregner for en ordens skyld at

$$\begin{aligned} b'_n(f) &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) \sin n\theta d\theta \\ &= \tfrac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \tilde{f}(\theta) \sin n\theta d\theta \\ &= \tfrac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \end{aligned}$$

hvor vi brugte at integranden er lige og at $\tilde{f}$ stemmer overens med f næsten overalt på $[0,\pi]$.

En diskussion af punktvis konvergergens for sinusrækker følger næsten uden videre den tilsvarende diskussion af punktvis konvergens af fourierrækker. Bemærk dog at sinusrækker altid konvergerer punktvis i 0 og π mod 0. Jeg springer det over her. Men viser til gengæld i detalje:

Sætning 2.8' *Hvis $f \in C([0,\pi])$ er stykkevis glat, og hvis $f(0) = f(\pi) = 0$, så er sinusrækken for f uniformt konvergent mod f.*

BEVIS: Vi kan anvende Sætning 2.8 hvis vi kan vise at $\tilde{f}$ er stykkevis glat i $C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$. Bemærk først at $\tilde{f}$ er periodisk da $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi) = 0$. Det er klart at $\tilde{f}$ er kontinuert i $]-\pi,0[$ og i $]0,\pi[$, men vi må checke at den er kontinuert i 0 og π. Og det følger ved

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to 0+} \tilde{f}(\theta) &= \lim_{\theta\to 0+} f(\theta) = 0 \\ \lim_{\theta\to 0-} \tilde{f}(\theta) &= \lim_{\theta\to 0-} -f(-\theta) = \lim_{\theta\to 0+} -f(\theta) = 0 \\ \lim_{\theta\to -\pi+} \tilde{f}(\theta) &= \lim_{\theta\to -\pi+} -f(-\theta) = \lim_{\theta\to \pi-} -f(\theta) = 0 \\ \lim_{\theta\to \pi-} \tilde{f}(\theta) &= \lim_{\theta\to \pi-} f(\theta) = 0 \end{aligned}$$

Pr. definition er f differentiabel undtagen i endelig mange punkter

$$0 = \theta_1 < \cdots < \theta_n = \pi.$$

Det er klart at så er $\tilde{f}$ differentiabel undtagen i endelig mange punkter

$$S = \{\pm\theta_1, \ldots, \pm\theta_m\},$$

og vi har

$$\tilde{f}'(\theta) = \begin{cases} f'(\theta) & 0 < \theta < \pi, \theta \notin S \\ f'(-\theta) & -\pi < \theta < 0, \theta \notin S \end{cases}.$$

Så har den afledede grænseværdier fra højre og venstre overalt fordi f' har det. $\square$

2AN/e96/45/SE