Om opgaverne II.2.4 og II.2.12 Hold 9

Opgave II.2.4:

Vi bemærker først at $f(\theta) = |\theta|$ ligger i $\mathcal{L}_1([-\pi, \pi])$ og at

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\theta| e^{-in\theta} d\theta \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\theta| [\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)] d\theta \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\theta| \cos(-n\theta) d\theta \\
&= \tfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} |\theta| \cos\theta d\theta \\
&= \tfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \theta \cos\theta d\theta
\end{aligned}$$

hvor det blev brugt at $f \sin$ er ulige og $f \cos$ er lige. Ved partiel integration fås

$$c_n(f) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\pi}{2}, & n = 0 \\ \frac{1}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - 1), & n \neq 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} & n = 0 \\ 0 & n \text{ lige }, n \neq 0 \\ -\frac{2}{\pi n^2} & n \text{ ulige} \end{array} \right.$$

så fourierrækken[1] for f er

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ ulige}} \frac{1}{n^2} e^{in\theta}$$

Da $f(\pi) = \pi = f(-\pi)$ kan f udvides til en periodisk funktion (se figur) på $\mathbb{R}$. Den er klart kontinuert, og differentiabel undtagen i $p\pi, p \in \mathbb{Z}$. Vi har imidlertid

$$f'(\theta) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \theta \in]-\pi, 0[\\ -1, & \theta \in]0, \pi[\end{array} \right.$$

så f' er stykkevis kontinuert fordi den tydeligvis har grænseværdier ± 1 fra højre og venstre i $p\pi$. Således er f stykkevis glat.

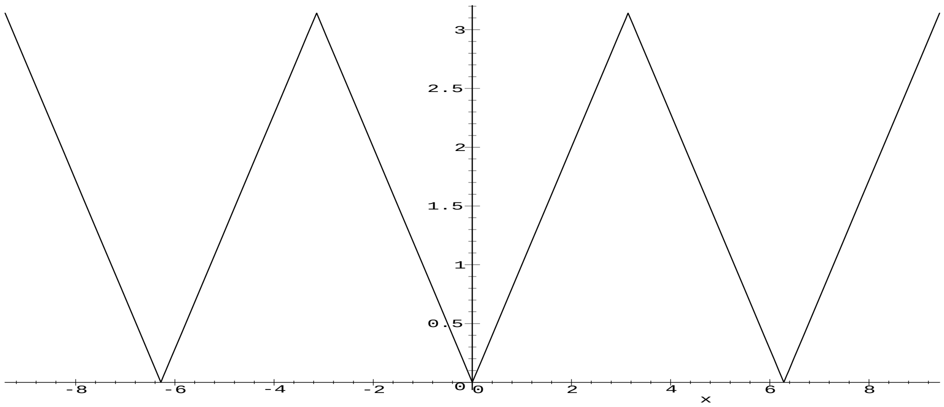
Vi kan anvende Sætning 2.8, der siger at fourierrækken for f konvergerer uniformt mod f. Dermed konvergerer den også punktvis (og i L_2!).

Opgave II.2.16:

[1] Vi kan også skrive det som en cosinusrække

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ ulige}, n>0} \frac{1}{n^2} \cos(n\theta)$$

— men der blev bedt om en **fourierrække**!



Figur 1: Den periodiske udvidelse af f

Ved den allersidste bemærkning i Appendiks C er det nok at vise at rækken selv, og alle de ledvis afledede op til tredje orden

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{4n^5+n+3}\frac{d}{d\theta}e^{in\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{in}{4n^5+n+3}e^{in\theta}$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{4n^5+n+3}\frac{d^2}{d\theta^2}e^{in\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(in)^2}{4n^5+n+3}e^{in\theta}$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{4n^5+n+3}\frac{d^3}{d\theta^3}e^{in\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(in)^3}{4n^5+n+3}e^{in\theta}$$

konvergerer uniformt over $\mathbb{R}$. Det viser vi ved at benytte majorantkriteriet. En anvendelig majorantrække for alle de fire rækker er

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{n^3}{4n^5+n+3}$$

fordi

$$\left|\frac{(in)^m}{4n^5+n+3}e^{in\theta}\right| \leq \frac{n^3}{4n^5+n+3}$$

for alle $\theta \in \mathbb{R}$ og alle $m \in \{0,1,2,3\}$. Da vi har

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{n^3}{4n^5+n+3} \leq \frac{1}{8} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{n^3}{4n^5} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{8} + \frac{\pi^2}{12} < \infty$$

er det en konvergent majorantrække, og sætning II.B.2 kan anvendes.