Om opgaven II.3.12 Hold 9

Huskeseddel vedrørende separation af variable

Betragt de tre udsagn

$$
\begin{aligned}
&(1) & X'' &= -\lambda X \\
&(2) & X(0) &= 0 \\
&(3) & X(L) &= 0
\end{aligned}
$$

for en C^2-funktion $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vi har

λ	Løsninger til (1)	Løsninger til (1)(2)	Løsninger til (1)(2)(3)
$= 0$	$X(x) = ax + b$	$X(x) = ax$	$X(x) = 0$
< 0	$X(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$	$X(x) = a\sinh(\sqrt{\lambda}x)$	$X(x) = 0$
> 0	$X(x) = ae^{i\sqrt{\lambda}x} + be^{-i\sqrt{\lambda}x}$	$X(x) = a\sin(\sqrt{\lambda}x)$	$(*)$

hvor

$$
(*) \qquad X(x) = \begin{cases} a\sin(\sqrt{\lambda}x) & \lambda = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} .
$$

Opgave II.3.12:

Vi betragter problemet

$$
\begin{aligned}
&(4) & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\
&(5) & u(x,0) = u(x,b) = u(0,y) &= 0 \\
&(6) & u(a,y) &= g(y)
\end{aligned}
$$

som vi vil angribe ved hjælp af separation af variable. Antag således at en løsning er af formen $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Som sædvanlig får vi

$$
\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda
$$

og kombineres dette med randbetingelserne får vi

$$
X'' = \lambda X, \qquad X(0) = 0
$$

og

$$
Y'' = -\lambda Y, \qquad Y(0) = 0, \qquad Y(b) = 0.
$$

Opslag i tabellen herover giver at der er ikke-trivielle løsninger til ligningen i Y når $\lambda = \frac{\pi^2 n^2}{b^2}$ og at disse er proportionale med

$$\sin(\sqrt{\lambda}y).$$

Endnu et opslag viser at da må løsningen til ligningen i X være proportional med

$$\sinh(\sqrt{\lambda}x)$$

og vi får løsninger til (4)–(5) af formen

$$u_n(x,y) = d_n X_n(x) Y_n(y) = d_n \sinh(\tfrac{\pi n}{b}x)\sin(\tfrac{\pi n}{b}y).$$

Vi søger videre efter løsninger til (4)–(6) af formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(\tfrac{\pi n}{b}x)\sin(\tfrac{\pi n}{b}y)$$

og bemærker at et nødvendigt krav er

$$g(y) = u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(\tfrac{\pi n}{b}a)\sin(\tfrac{\pi n}{b}y).$$

Vores gæt bliver — inspireret af alt dette — at benytte en sinusrækkefremstilling for g til at vælge konstanterne i rækken. For at dette skal gå op må

$$d_n \sinh(\tfrac{\pi n}{b}a) = \tfrac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\tfrac{\pi n}{b}y dy.$$

altså

$$d_n = \frac{\frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{\pi n}{b}y dy}{\sinh(\frac{\pi n}{b}a)}.$$

Efter noget 'løs snak' formuleres nu en række helt præcise matematiske påstande angående rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh(\frac{\pi n}{b}x)}{\sinh(\frac{\pi n}{b}a)}\sin(\tfrac{\pi n}{b}y)$$

hvor

$$b_n = \tfrac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\tfrac{\pi n}{b}y dy$$

nemlig

(i) Rækken og alle dens ledvist afledede konvergerer uniformt på $\overline{\Omega}^{\varepsilon}_{a,b} = [0, a-\varepsilon]\times[0,b]$ for hvert $\varepsilon > 0$.

(ii) Rækkens sum er en løsning til (4)–(5).

(iii) Hvis g er kontinuert og stykkevis glat på $[0,b]$ og $g(0)=g(b)=0$ så konvergerer rækken uniformt i $\overline{\Omega}_{a,b}=[0,a]\times[0,b]$.

(iv) Hvis g er kontinuert og stykkevis glat på $[0,b]$ og $g(0)=g(b)=0$ så er rækkens sum en løsning til (4)–(6).

Beviset for alt dette følger nøje beviset for Sætning 3.6 og jeg vil være lidt kortfattet. Først bemærkes at når $x\le a-\varepsilon$, så vil

$$\frac{\sinh(\frac{\pi n}{b}x)}{\sinh(\frac{\pi n}{b}a)} \le e^{-\frac{n\pi\varepsilon}{b}}\frac{1}{1-e^{-2\frac{\pi b}{a}}} \tag{7}$$

$$\frac{\cosh(\frac{\pi n}{b}x)}{\sinh(\frac{\pi n}{b}a)} \le e^{-\frac{n\pi\varepsilon}{b}}\frac{2}{1-e^{-2\frac{\pi b}{a}}} \tag{8}$$

og at $|b_n|\le K$ for en konstant K fordi koefficienterne til en sinusrække er kvadratisk summable. Vi ønsker at se på

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{\partial^r}{\partial x^r}\frac{\partial^s}{\partial y^s}\left(\frac{\sinh(\frac{\pi n}{b}x)}{\sinh(\frac{\pi n}{b}a)}\sin(\tfrac{\pi n}{b}y)\right)$$

for $r,s\in\{0,1,2,\dots\}$, og det kan vi omskrive til

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\sinh(\tfrac{\pi n}{b}a)\right)^{-1}\left(\frac{\pi n}{b}\right)^r\sinh^{(r)}(\tfrac{\pi n}{b}x)\left(\frac{\pi n}{b}\right)^s\sin^{(s)}(\tfrac{\pi n}{b}y)$$

hvor $f^{(0)}=f$ som sædvanlig. Kaldes det n'te led i rækken for $\ell_n(x,y)$ kan vi vurdere

$$\begin{aligned}
|\ell_n(x,y)| &\le K\frac{|\sinh^{(r)}(\frac{\pi n}{b}x)|}{\sinh(\frac{\pi n}{b}a)}\left(\frac{\pi n}{b}\right)^r\left(\frac{\pi n}{b}\right)^s\\
&\le Ke^{-\frac{n\pi\varepsilon}{b}}\frac{2}{1-e^{-2\frac{\pi b}{a}}}\left(\frac{\pi n}{b}\right)^{r+s}\\
&= K'n^{r+s}e^{-\frac{n\pi\varepsilon}{b}}.
\end{aligned}$$

hvor K' er en passende valgt konstant der ikke afhænger af n. Undervejs brugte vi at $\sinh^{(r)}$ er enten $\pm\sinh$ eller $\pm\cosh$ og vurderingerne fra (7) og (8); samt at $\sin^{(s)}$ er $\pm\sin$ eller $\pm\cos$ og derfor numerisk begrænset af 1. Da rækken

$$\sum_{1}^{\infty} n^{r+s}e^{-\frac{n\pi\varepsilon}{b}}$$

er konvergent (brug fx kvotientkriteriet), har vi herved fundet en konvergent majorantrække for den ledvist afledede række (eller rækken selv) på $\overline{\Omega}^{\varepsilon}_{a,b}$. Det viser (i) ved Appendiks B.

Og nu følger (ii) ved at henvise til Appendiks C; sumfunktionen er vilkårligt ofte differentiabel og specielt er de afledede $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ og $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ givet ved summen af de tilsvarende ledvist afledede. Vi har sørget for at

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sinh(\tfrac{\pi n}{b}x)\sin(\tfrac{\pi n}{b}y)\right) = 0$$

og så er (4) altså opfyldt fordi $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ på summen udarter til en sum af nulfunktioner. At (5) også gælder er klart.

Vi antager nu at g opfylder kravene i (iii) og (iv). Vi er interesserede i at etablere uniform konvergens over $\overline{\Omega}_{a,b}$, og vi bemærker at

$$\left| b_n \frac{\sinh(\frac{\pi n}{b}x)}{\sinh(\frac{\pi n}{b}a)} \sin(\tfrac{\pi n}{b}y) \right| \leq |b_n| \frac{1}{1 - e^{-2\frac{\pi b}{a}}}$$

ved (7) anvendt for $\varepsilon = 0$. Da vi ved at $\sum_1^\infty |b_n| < \infty$ har vi hermed fundet en konvergent majorantrække på hele $\overline{\Omega}_{a,b}$ og påstanden i (iii) er vist. Endelig har vi som i Opgave 2.9 at sinusrækken konvergerer mod g når vi sætter $x = a$.

2AN/e96/47/SE