Om opgave 4, eksamen V95/96 Hold 9

Opgave 4a:

Vi benytter som på side II.3.7 det indre produkt

$$(f,g) = 2\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

på $L_2([0,1])$. Her er $(\sin(n\pi x))$ en ONB!

Betragt $f(x) = x\sin(\pi x)$. Vi udregner (direkte, ved trigonometriske regneregler og partiel integration) at

$$(f(x), \sin(n\pi x)) = 2\int_0^1 x\sin(\pi x)\sin(n\pi x)dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 1 \\ 0 & n \text{ ulige}, n > 0 \\ b_n & n \text{ lige}, n \geq 0 \end{cases}$$

hvor

$$b_n = -\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{-8n}{\pi^2(1-n^2)^2}.$$

Altså er sinusrækken for f givet ved

$$\tfrac{1}{2}\sin\pi x + \sum_{n \text{ lige}} \frac{-8n}{\pi^2(1-n^2)^2}\sin n\pi x.$$

Opgave 4b:

Vi behøver, som på side II.3.12, blot at vise at den ulige udvidelse af f er kontinuert og stykkevis glat. Det kommer ud på at vise at f er kontinuert og stykkevis glat og at

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Dette sidste er klart, ligesom det er klart at f er kontinuert. Vi viser at f er stykkevis glat i tre trin:

(i) f er differentiabel med

$$f'(x) = \sin\pi x + \pi x\sin\pi x$$

i hele $]0,1[$. Dermed er f differentiabel undtagen i endelig (altså to!) mange punkter af $[0,1]$.

(ii) f' er kontinuert overalt hvor den er defineret

(iii) f' har grænseværdier fra højre og venstre i 0 og 1. Vi har jo uden videre

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 1-} f'(x) = 0.$$

Opgave 4c:

Vi har set i Sætning I.3.6 at løsningen til det anførte problem kan findes vha sinuskoefficienterne for f. Indsætning giver en funktion u givet ved

$$u(x,y) = \tfrac{1}{2}\sin \pi x \frac{\sinh \pi(1-y)}{\sinh \pi} + \sum_{n \text{ lige}} b_n \sin(n\pi x)\frac{\sinh n\pi(1-y)}{\sinh n\pi}.$$

Fordi f er kontinuert og stykkevis glat på $[0,1]$ med $f(0) = f(1) = 0$ er u da en løsning til det givne Dirichlet problem. 2AN/e96/50/SE