Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København, December 2003

Reel analyse og lineær algebra (Matematik H1)

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

Vejledende $2\frac{1}{2}$ times skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art, eller andet elektronisk udstyr.

Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

Opgave 1 (Vægt ca. 30 %)

Betragt matricen

$$\underline{\underline{A}}(c) = \begin{pmatrix} c & 0 & 4 \\ c & 2 & c \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix},$$

hvor c er et vilkårligt reelt tal.

(i) Omform $\underline{\underline{A}}(c)$ til en trappematrix ved rækkeoperationer. (Dette kan lade sig gøre uden antagelser om værdien af c.)

(ii) Bestem to tal c_1 og c_2, så at når $c \neq c_1$ og c_2, har ligningen

$$\underline{\underline{A}}(c)\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$$

en entydigt bestemt søjlevektor $\underline{\underline{X}}$ som løsning for enhver given søjlevektor $\underline{\underline{B}}$. Hvad er løsningen, når $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}}$?

(iii) Find løsningerne til ligningen

$$\underline{\underline{A}}(c)\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{0}},$$

når $c = c_1$ eller c_2.

Opgave 2 (Vægt ca. 30 %)

Betragt funktionen

(1) $$F(x, y, z) = xye^{z-1} - ax - by - 2z,$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

defineret på $\mathbb{R}^3$; her er a og b givne konstanter.

(i) Beregn de partielle afledede af F af første orden.

(ii) Find $F(1,1,1)$. Det oplyses, at ligningen

$$F(x,y,z) = -(a+b+1) \tag{2}$$

i en omegn af punktet $(1,1,1)$ definerer z som en funktion af (x,y), således at løsningerne til (2) er punkterne (x,y,z) med $z = h(x,y)$ (for (x,y) i en passende cirkel med centrum $(1,1)$), og at funktionen h har partielle afledede.

Beregn $h_1'(1,1)$ og $h_2'(1,1)$. Vis, at punktet $(1,1)$ er stationært for h for netop et valg af a og b; find dette.

(iii) Angiv en ligning for tangentplanen i punktet $(1,1,1)$ til den flade i $\mathbb{R}^3$, der fremstilles ved (2).

Opgave 3 (Vægt ca. 40 %)

Betragt funktionen

$$f(x,y) = e^{y^2-x^2}, \tag{1}$$

defineret på $\mathbb{R}^2$.

(i) Skitsér niveaukurverne (isokvanterne) for f.

(ii) Find de stationære punkter for f og find ud af deres type (lokalt maksimum, lokalt minimum eller saddelpunkt).

(iii) Vis, at der findes højst ét punkt (x_0, y_0) i $\mathbb{R}^2$, hvor f kan have maksimum under bibetingelsen

$$x - 2y = -2; \tag{2}$$

bestem punktet.

(iv) Vis, at f har lokalt maksimum i (x_0, y_0) under bibetingelsen (2).

(v) Vis (eventuelt ved en geometrisk betragtning), at f har maksimum i (x_0, y_0) under bibetingelsen (2).