Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København, Juli 2002

Reel analyse og lineær algebra (Matematik H1)

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (Vægt ca. 10%)

Vis at matricen

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & -1 & 8 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

er ortogonal, og angiv A^{-1}.

Opgave 2 (Vægt ca. 18 %)

For ethvert punkt (x, y) i $\mathbb{R}^2$ defineres funktionen

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 \,.$$

(i) Opskriv Hesse matricen for f i et vilkårligt punkt (x, y).

(ii) Skitser de områder hvor f er henholdsvis konvex og konkav.

(iii) Beregn størsteværdien af f indenfor området

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 2 \quad \text{og} \quad |x| \le y \le \tfrac{1}{3}(x + 4)\} \,.$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt ca. 18 %)

(i) Find det karakteristiske polynomium og de karakteristiske rødder hørende til matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Gør rede for at der findes en diagonalmatrix D og en regulær matrix Q således at $A = QDQ^{-1}$, og angiv en mulig form for diagonalmatricen D.
[VINK: Det er ikke nødvendigt at udregne Q.]

(iii) Afgør hvorvidt man i formlen $A = QDQ^{-1}$ kan vælge Q ortogonal.

Opgave 4 (Vægt ca. 18 %)

For ethvert punkt (x, y) i $\mathbb{R}^2$ defineres funktionen

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 3)e^{2x-y}.$$

(i) Skitser det område hvor $f(x, y) \leq 0$.

(ii) Gør rede for at f antager en mindste værdi, men ikke har nogen største værdi i $\mathbb{R}^2$.

(iii) Find det punkt hvori f antager sin mindste værdi og angiv denne.

Opgave 5 (Vægt ca. 18 %)

(i) Find den inverse til matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 2 & -3 & 8 \\ 3 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

(ii) Løs ligningssystemet

$$2x - 5y + 5z = \pi$$
$$2x - 3y + 8z = \sqrt{2}$$
$$3x - 8y + 7z = e$$

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (Vægt ca. 18 %)

(i) Skitser de to områder

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{og} \quad y \geq 0\}$$
$$\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{og} \quad x + y \geq 0\}$$

(ii) Udregn integralet

$$\iint_{\Omega_1} 2x^2 y \, dx \, dy$$

(iii) Angiv værdien af integralet

$$\iint_{\Omega_2} (x - y) \, dx \, dy$$

[VINK: Husk at integralet angiver volumenet (regnet med fortegn) af det rumlige område der afgrænses af $z-$planen, fladen $z = x - y$ og det plane område Ω_2.]