Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København, Juni 2004

Reel analyse og lineær algebra (Matematik H1)

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art, eller andet elektronisk udstyr.

Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (Vægt ca. 15 %)

Vektorerne $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_2$ i $\mathbb{R}^4$ defineres ved

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_2$ er lineært uafhængige, og find en basis for $\mathbb{R}^4$, der indeholder $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_2$.

(b) Lad $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ være den lineære afbildning beskrevet ved:

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2)\underline{a}_1 + (x_1 - x_2)\underline{a}_2 + 2x_1\underline{e}_4.$$

(Standard enhedsvektorerne i $\mathbb{R}^4$ er betegnet ved $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_4$.) Opskriv matricen for φ med hensyn til de naturlige baser i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^4$.

(c) Bestem rangen af φ.

Opgave 2 (Vægt ca. 20 %)

Betragt den kvadratiske form

$$K(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 4x_3x_1,$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

med tilhørende matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at $(0,0,0)$ er et stationært punkt for K, og afgør, om det er lokalt maksimum, lokalt minimum eller saddelpunkt.

(b) Vis, at $\lambda = 3$ er en egenværdi for $\underline{\underline{A}}$. Find alle egenværdier og deres egenværdimultipliciteter.

(c) Find en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$ og en diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}$, så at $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}^t \, \underline{\underline{D}} \, \underline{\underline{S}}$.

Opgave 3 (Vægt ca. 15 %)

Betragt funktionen

(1) $$F(x,y,z) = x\ln(y+z) - x^2 - y^2 + z^2,$$

defineret på mængden $A = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z > 0\,\}$.

(a) Beregn de partielle afledede af F af første orden, og find $F(1,0,1)$.

(b) Det oplyses (og skal ikke eftervises), at ligningen

(2) $$F(x,y,z) = 0$$

fastlægger den variable z som en to gange differentiabel funktion af (x,y), betegnet $z = f(x,y)$, i nærheden af punktet $(x_0,y_0) = (1,0)$. Beregn $f(1,0)$, $f_1'(1,0)$ og $f_2'(1,0)$.

(c) Angiv en ligning for tangentplanen i punktet $(1,0,1)$ til den flade i A, der fremstilles ved (2).

Opgave 4 (Vægt ca. 25 %)

Betragt funktionen

$$h(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{4}y^2,$$

på området $S = \{\,(x,y) \mid x > 0, y > 0\,\}$.

(a) Det oplyses, at h har netop ét stationært punkt i S; find dette.

(b) Vis, at h er konkav på S.

(c) Afgør, om det stationære punkt er et lokalt eller globalt maksimum, et lokalt eller globalt minimum, eller et saddelpunkt.

Opgave 4 fortsættes på side 3

(d) Undersøg ved Lagrange's metode, om der er nogen punkter i S, der opfylder de nødvendige betingelser for at h antager maksimum under bibetingelsen

$$(\#) \qquad x - y = 0.$$

(e) For det/de under (d) fundne punkt(er) vises, at der faktisk er maksimum i S under bibetingelsen (#).

Opgave 5 (Vægt ca. 15 %)

Lad U betegne følgende underrum af $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{\, (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \,\}.$$

(a) Find en ortonormalbasis for U.
(b) Lad $V = U^{\perp}$; bestem en basis for V.
(c) Bestem ortogonalprojektionen på U af første enhedsvektor $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)$.

Opgave 6 (Vægt ca. 10 %)

Lad $G(x, y)$ betegne funktionen

$$G(x, y) = y \cos x,$$

og lad B betegne området

$$B = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \,\}.$$

(a) Skitsér området B.
(b) Udregn integralet $\iint_B G(x, y)\, dxdy$. (Størrelser som $\cos 1$ og $\sin 1$ behøver ikke præciseres nærmere.)