

## Matematik H1

### Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timer skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladte, dog ikke regnemaskiner af nogen art.  
Sættet er på 3 sider og består af 8 opgaver som vægtes lige.

#### Opgave 1

Lad  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  være den lineære afbildning med tilhørende matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 9 \\ 4 & -1 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

- Bestem kernen for  $f$ .
- Bestem rangen  $\text{rg } f$  og find en basis for billedrummet  $f(\mathbb{R}^4)$ .
- Find den ortogonale projektion af vektoren  $\underline{v} = (0, 0, 10, 0)$  på billedrummet for  $f$ .

#### Opgave 2

I  $\mathbb{R}^3$  er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = (1, 1, 3), \quad \underline{a}_2 = (2, 2, 5), \quad \underline{a}_3 = (2, 3, 6)$$

- Vis, at sættet  $\alpha = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$  udgør en basis for  $\mathbb{R}^3$ .
- En lineær afbildning  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  er m.h.t. den naturlige basis givet ved matricen

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -2 \\ 12 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Bestem matricen for  $f$  m.h.t. basen  $\alpha$

### Opgave 3

Lad  $\underline{\underline{A}}$  betegne  $3 \times 3$  matricen givet ved

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Gør rede for, at der findes en ortonormalbasis for  $\mathbb{R}^3$  bestående af egenvektorer for  $\underline{\underline{A}}$ .
- Bestem en ortonormalbasis bestående af egenvektorer for  $\underline{\underline{A}}$ .

### Opgave 4

Lad for  $c \in \mathbb{R}$   $\underline{\underline{A}}(c)$  betegne matricen

$$\underline{\underline{A}}(c) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 1 & c+2 & -1 \\ -2 & 2c-8 & 4 \end{pmatrix}$$

- Vis, at vektorerne  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 2)$ ,  $(8 - c, 3, 2c - 10)$  alle er egenvektorer for  $\underline{\underline{A}}(c)$  og bestem de tilhørende egenverdier.
- Begrund, at for  $c \neq 8$  er  $\underline{\underline{A}}(c)$  diagonaliserbar.
- Bestem for alle  $c \neq 8$  en invertibel  $3 \times 3$  matrix  $\underline{\underline{S}}(c)$  således at

$$\underline{\underline{S}}(c)^{-1} \underline{\underline{A}}(c) \underline{\underline{S}}(c)$$

er en diagonalmatrix.

### Opgave 5

Lad  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  være givet ved

$$f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 3.$$

- Begrund, at  $f$  har en mindste værdi. Bestem denne og det punkt hvori den antages.
- Lad  $M$  betegne delmængden af  $\mathbb{R}^2$  givet ved

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x \text{ og } 0 \leq x \leq 2\}.$$

Skitser mængden  $M$  og begrund, at restriktionen af  $f$  til  $M$  har såvel en største- som en mindsteværdi. Bestem disse og de punkter hvori de antages.

### Opgave 6

Lad  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  være givet ved

$$f(x, y) = x^2 - y^3 + y.$$

- Begrund, at ligningen  $f(x, y) = 1$  fastlægger  $y$  som en differentiabel funktion af  $x$ ; " $y = g(x)$ ," i en omegn af punktet  $(1, 1)$ .
- Bestem det andet Taylorpolynomium for  $g$  i udviklingspunktet  $x = 1$ .

### Opgave 7

Lad  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  og  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  være givne ved

$$f(x, y) = x^3 - 3x - y^2$$

$$g(x, y) = x^2 - 2x + y^2$$

- Begrund, at  $f$  har såvel en største- som en mindsteværdi under bibetingelsen  $g(x, y) = 0$ .
- Bestem største- og mindsteværdi for  $f$  under bibetingelsen  $g(x, y) = 0$ , og angiv de punkter hvori værdierne antages.

### Opgave 8

For  $x \in \mathbb{R}$  med  $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$  defineres en differentiabel funktion  $g$  ved

$$g(x) = \int_{x^2}^{\pi} t^{1/2} \cos(xt^{1/2}) dt$$

- Find for  $0 < x < \sqrt{\pi}$  et udtryk for  $g'(x)$ . Et indgående bestemt integral ønskes ikke beregnet.
- Beregn  $\int_0^{\sqrt{\pi}} g(x) dx$ .