# Indhold

# Forord

Dette fagprojekt er udarbejdet i foråret 99 i forlængelse af et kursus i $K$-teori for $C^*$-algebraer, afholdt af Mikael Rørdam efteråret 98.

I begyndelsen af arbejdsprocessen havde vi et håb om, at dette projekt skulle nå langt. Vores hovedlitteratur var [4]. Vi var i lang tid af den opfattelse, at det var en god fremstilling vi her havde i hænde, men efter at have brugt adskillige timer på nærlæsning, og efter gentagne gange at støde på, hvad vi opfatter som mangler og unøjagtigheder, ændrede vores positive indstilling sig. Vi blev enige om, at hvis projektets indhold var noget, som vi selv skulle kunne stå inde for, så var vi nødt til at bruge kræfter på at give en grundig og stringent fremstilling, og følgende er et forsøg herpå. Omkostningen blev en reduktion af projektets omfang, ikke i antallet af sider, men i antallet af resultater fra den videregående BDF-teori.

Det er vores spinkle håb, at hvis andre studerende ønsker at beskæftige sig med BDF-teori, da vil nærværende fremstilling kunne tjene som et godt udgangspunkt for et videre studium.

For generelle resultater i $C^*$-algebrateori henviser vi til Murphys bog [6].

Henrik Holm Mikkel M. Larsen
København, juni 1999.

# 1 Extensioner af $\mathcal{K}$ med $C(X)$

## 1.1 Extensioner og monomorfier.

Lad $H$ være et (fast) komplekst uendeligdimensionalt separabelt Hilbertrum, og lad $\mathbb{B}_f(H)$ resp. $\mathcal{K} = \mathcal{K}(H)$ være idealet af endeligdimensionale resp. kompakte operatorer i $\mathbb{B}(H)$. $\mathcal{U}(H)$ er mængden af unitære operatorer i $\mathbb{B}(H)$. Med $Q(H)$ betegnes Calkinalgebraen $\mathbb{B}(H)/\mathcal{K}$, og $\pi\colon \mathbb{B}(H) \to Q(H)$ er kvotienthomomorfien. Endelig lader vi $X \neq \emptyset$ være et kompakt metrisk rum.

Ved en *extension af* $\mathcal{K}$ *med* $C(X)$ forstås et par $(\mathcal{E}, \varphi)$, hvor $\mathcal{E}$ er en $C^*$-delalgebra af $\mathbb{B}(H)$ indeholdende $\mathcal{K}$ samt enheden $I \in \mathbb{B}(H)$, og hvor $\varphi\colon \mathcal{E} \to C(X)$ er en $*$-homomorfi, således at følgen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{E} \arrow[r, "\varphi"] & C(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

er exakt. Bemærk at $\varphi$ automatisk bliver unital, idet $\varphi$ er surjektiv. Mængden af extensioner af $\mathcal{K}$ med $C(X)$ betegnes $\mathcal{E}xt(X)$. Vi siger, at $(\mathcal{E}, \varphi)$ *splitter* (er *triviel*), hvis følgen ovenfor er splitexakt, hvilket vil sige, at der findes $*$-homomorfi $\lambda\colon C(X) \to \mathcal{E}$ så $\varphi\lambda = \mathrm{id}_{C(X)}$.

En $*$-*monomorfi* er som sædvanlig en injektiv $*$-homomorfi. Det viser sig at være relevant at betragte unitale $*$-homomorfier resp. unitale $*$-monomorfier fra $C(X)$ ind i $Q(H)$, og mængden af disse betegnes $\mathcal{H}om(X)$ resp. $\mathcal{M}on(X)$. Vi siger at $\tau \in \mathcal{H}om(X)$ *splitter* (er *triviel*), såfremt der findes $*$-homomorfi $\rho : C(X) \to \mathbb{B}(H)$ med $\tau = \pi\rho$. Vi illustrerer :

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\rho"'] & & Q(H) \\ & \mathbb{B}(H) \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Bemærk, at $\tau$ er injektiv netop hvis $\rho$ er injektiv og $\mathrm{Im}(\rho) \cap \mathcal{K} = 0$. Man kan faktisk antage $\rho(1) = I$, thi under alle omstændigheder er $P = \rho(1)$ en projektion i $\mathbb{B}(H)$, og vælges nu $x_0 \in X$, vil

$$\rho' : C(X) \to \mathbb{B}(H) \quad , \quad f \ \mapsto \ \rho(f) + f(x_0)(I - P)$$

være en $*$-homomorfi med $\rho'(1) = I$ og $\pi\rho' = \pi\rho = \tau$, idet jo $\pi(P) = \pi\rho(1) = \tau(1) = \pi(I)$. Det virker naturligt, at opfatte visse extensioner, såvel som $*$-homomorfier, for ækvivalente, og derfor indfører vi

**Definition 1.1** For $(\mathcal{E}_1, \varphi_1), (\mathcal{E}_2, \varphi_2) \in \mathcal{E}xt(X)$ sættes $(\mathcal{E}_1, \varphi_1) \sim (\mathcal{E}_2, \varphi_2)$ såfremt der findes unitær $U \in \mathbb{B}(H)$ med $(\mathrm{Ad}\, U)(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2$ og $\varphi_1 = \varphi_2 \,\mathrm{Ad}\, U$.
For $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{H}om(X)$ sættes $\tau_1 \sim \tau_2$, hvis der findes en unitær $U \in \mathbb{B}(H)$ således at $\tau_1 = \mathrm{Ad}\, \pi(U)\, \tau_2$.

**Bemærkning 1.2** Det ses let, at der herved defineres ækvivalensrelationer i både $\mathcal{E}xt(X)$ og $\mathcal{H}om(X)$, og dermed også i $\mathcal{M}on(X)$.
Vedrørende ækvivalensen i $\mathcal{E}xt(X)$, er det faktisk nok at kræve eksistensen af en eller anden $*$-isomorfi $\psi\colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ med $\varphi_1 = \varphi_2\psi$. Da vil $\psi$ nemlig automatisk have formen $\mathrm{Ad}\, U$ for en unitær $U \in \mathbb{B}(H)$ (se f.eks [4, side 253]). Vi får dog ikke brug for dette.

**Lemma 1.3** *Hvis* $U \in \mathcal{U}(H)$*, da vil* $(\mathrm{Ad}\, U)(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$*.*

**Bevis.** Det er klart, at $(\mathrm{Ad}\, U)(\mathbb{B}_f(H)) = \mathbb{B}_f(H)$, og derfor også

$$(\mathrm{Ad}\, U)(\mathcal{K}) \;=\; (\mathrm{Ad}\, U)(\overline{\mathbb{B}_f(H)}) \;=\; \overline{(\mathrm{Ad}\, U)(\mathbb{B}_f(H))} \;=\; \overline{\mathbb{B}_f(H)} \;=\; \mathcal{K}$$

som ønsket. □

**Lemma 1.4** *Antag $\tau, \sigma \in \mathcal{H}om(X)$ med $\tau \sim \sigma$. Hvis $\tau$ splitter, da vil også $\sigma$ splitte, og hvis $\tau \in \mathcal{M}on(X)$, da vil også $\sigma \in \mathcal{M}on(X)$.*

**Bevis.** Vi har $\sigma = \mathrm{Ad}\, \pi(U)\, \tau$ for et $U \in \mathcal{U}(H)$. Påstanden om $\mathcal{M}on(X)$ er klar, idet $\mathrm{Ad}\, \pi(U)$ er en $*$-isomorfi. For split bemærkes, at hvis $\tau = \pi\rho$, da vil $\sigma = \pi(\mathrm{Ad}\, U\, \rho)$. □

**Fundamentallemma 1.5** *Ved fastsættelserne*

$$\begin{aligned}
\Phi &: \mathcal{E}xt(X) \to \mathcal{M}on(X) \quad , \quad \Phi(\mathcal{E}, \varphi)(f) = \pi\varphi^{-1}(f) \\
\Psi &: \mathcal{M}on(X) \to \mathcal{E}xt(X) \quad , \quad \Psi(\tau) = (\pi^{-1}(\tau(C(X))), \tau^{-1}\pi)
\end{aligned}$$

*hvor $\varphi^{-1}(f)$ betegner et eller andet løft af $f$ til $\mathcal{E}$, defineres afbildninger, der er hinandens inverse. Ved denne bijektive korrespondance gælder, at når $(\mathcal{E}_i, \varphi_i) \in \mathcal{E}xt(X)$ med $\tau_i = \Phi(\mathcal{E}_i, \varphi_i) \in \mathcal{M}on(X)$ for $i = 1, 2$, da vil*

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}_1, \varphi_1) \sim (\mathcal{E}_2, \varphi_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad \tau_1 \sim \tau_2 \\
(\mathcal{E}_1, \varphi_1) \text{ splitter} \quad &\Longleftrightarrow \quad \tau_1 \text{ splitter.}
\end{aligned}$$

**Bevis.** Hvis $T_1, T_2 \in \mathcal{E}$ begge opfylder $\varphi(T_1) = f = \varphi(T_2)$, da er $\varphi(T_1 - T_2) = 0$, hvormed $T_1 - T_2 \in \mathcal{K}$ og dermed $\pi(T_1) = \pi(T_2)$. Altså er $\Phi(\mathcal{E}, \varphi) : C(X) \to Q(H)$ en veldefineret afbildning, og det ses let, at det faktisk er en $*$-homomorfi. For at vise, at $\Phi(\mathcal{E}, \varphi)$ er *injektiv*, antages at $\Phi(\mathcal{E}, \varphi)(f) = 0$. Vælg $T \in \mathcal{E}$ så $\varphi(T) = f$. Da $0 = \Phi(\mathcal{E}, \varphi)(f) = \pi(T)$, er $T \in \mathcal{K} = \mathrm{Ker}(\varphi)$, hvormed $f = \varphi(T) = 0$. Endvidere er $\Phi(\mathcal{E}, \varphi)$ unital, idet

$$\Phi(\mathcal{E}, \varphi)(1) \;=\; \pi\varphi^{-1}(1) \;=\; \pi(I) \;=\; 1_{Q(H)} \; .$$

Dette etablerer $\Phi$.
Hvis $\tau \in \mathcal{M}on(X)$, er $\mathcal{E} = \pi^{-1}(\tau(C(X)))$ klart en $C^*$-delalgebra af $\mathbb{B}(H)$ indeholdende $\mathcal{K}$, men også $I$, idet jo $\pi(I) = \tau(1) \in \tau(C(X))$.
Da $\pi(\mathcal{E}) = \tau(C(X))$, er det klart, at $\tau^{-1}\pi$ afbilder $\mathcal{E}$ (veldefineret og) surjektivt på $C(X)$. Da også $\mathrm{Ker}(\tau^{-1}\pi) = \mathrm{Ker}(\pi) = \mathcal{K}$, etableres altså $\Psi$.
Vi ser nu at $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathcal{M}on(X)}$, idet der for alle $f \in C(X)$ gælder

$$\begin{aligned}
(\Phi \circ \Psi)(\tau)(f) &= \Phi(\pi^{-1}(\tau(C(X))), \tau^{-1}\pi)(f) \\
&= \pi(T) \;\; [\text{hvor } \tau^{-1}\pi(T) = f] \\
&= \tau(f) \\
&= \mathrm{id}_{\mathcal{M}on(X)}(\tau)(f).
\end{aligned}$$

Herefter vises $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathcal{E}xt(X)}$. Sæt $(\mathcal{E}', \varphi') = (\Psi \circ \Phi)(\mathcal{E}, \varphi)$ og $\tau = \Phi(\mathcal{E}, \varphi)$. Da er

$$\mathcal{E}' \;=\; \pi^{-1}(\tau(C(X))) \;=\; \pi^{-1}(\pi\varphi^{-1}(C(X))) \;=\; \pi^{-1}(\pi(\mathcal{E})) \;=\; \mathcal{E} \; .$$

Vi har også $\varphi' = \varphi$. For $T \in \mathcal{E} = \mathcal{E}'$ er nemlig $\tau(\varphi(T)) = \pi(T)$ (pr. definition af $\tau$), og derfor $\varphi(T) = \tau^{-1}(\pi(T)) = \varphi'(T)$.

Dette etablerer den påståede bijektive korrespondance, og tilbage er derfor kun at vise de to biimplikationer.

Antag først, at $(\mathcal{E}_1, \varphi_1) \sim (\mathcal{E}_2, \varphi_2)$, dvs. der findes $U \in \mathcal{U}(H)$ så $(\mathrm{Ad}\, U)(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2$ og $\varphi_1 = \varphi_2 \, \mathrm{Ad}\, U$. For $f \in C(X)$ er nu

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{Ad}\,\pi(U)\,\tau_1)(f) & = & \mathrm{Ad}\,\pi(U)(\pi(T)) \quad [\text{hvor } \varphi_1(T) = f] \\ & = & \pi(U)\pi(T)\pi(U)^* \\ & = & \pi(UTU^*) \\ & = & \pi((\mathrm{Ad}\,U)(T)) \\ & = & \tau_2(f)\ , \end{array}$$

fordi $\varphi_2(\mathrm{Ad}\,U\,(T)) = \varphi_1(T) = f$. Dermed er vist, at $\tau_1 \sim \tau_2$.
Antag omvendt at $\tau_1 \sim \tau_2$, dvs. der findes $U \in \mathcal{U}(H)$, så $\tau_2 = \mathrm{Ad}\,\pi(U)\,\tau_1$. Hvis $T \in \mathcal{E}_1$ er $\pi(T) \in \tau_1(C(X))$, hvormed $\pi(T) = \tau_1(f)$ for et $f \in C(X)$. Nu er

$$\begin{array}{rcl} \pi((\mathrm{Ad}\,U)(T)) & = & \pi(UTU^*) \qquad = \quad \pi(U)\pi(T)\pi(U^*) \\ & = & \pi(U)\tau_1(f)\pi(U^*) \quad = \quad (\mathrm{Ad}\,\pi(U)\,\tau_1)(f) \\ & = & \tau_2(f)\,, \end{array}$$

og derfor er $(\mathrm{Ad}\,U)(T) \in \pi^{-1}(\tau_2(C(X))) = \mathcal{E}_2$. Vi har hermed vist, at $(\mathrm{Ad}\,U)(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{E}_2$. Tilsvarende vises $(\mathrm{Ad}\,U^*)(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{E}_1$, og så fås

$$\mathcal{E}_2 \;=\; (\mathrm{Ad}\,U \circ\ \mathrm{Ad}\,U^*)(\mathcal{E}_2) \;\subseteq\; (\mathrm{Ad}\,U)(\mathcal{E}_1)\,.$$

Dette viser $(\mathrm{Ad}\,U)(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2$.
Endvidere er $\varphi_1 = \varphi_2\,\mathrm{Ad}\,U$, idet der for $T \in \mathcal{E}_1$ gælder

$$\begin{array}{rcl} (\tau_2\varphi_2\,\mathrm{Ad}\,U)(T) & = & \tau_2\varphi_2(UTU^*) \qquad = \quad \pi(UTU^*) \\ & = & \mathrm{Ad}\,\pi(U)\,(\pi(T)) \quad = \quad \mathrm{Ad}\,\pi(U)\,(\tau_1\varphi_1(T)) \\ & = & (\tau_2\varphi_1)(T)\,. \end{array}$$

Injektiviteten af $\tau_2$ giver nu det ønskede. Dette viser første biimplikation, medens den anden indses på denne måde :

Hvis $(\mathcal{E}_1, \varphi_1)$ splitter, findes en $*$-homomorfi $\sigma : C(X) \to \mathcal{E}_1$, så $\varphi_1\sigma = \mathrm{id}_{C(X)}$. For $f \in C(X)$ er nu $T = \sigma(f) \in \mathcal{E}_1$ med $\varphi_1(T) = \varphi_1\sigma(f) = f$, hvormed $\tau_1(f) = \pi(T) = \pi\sigma(f)$. Altså er $\tau_1 = \pi\sigma$, så $\tau_1$ splitter.
Antag omvendt, at $\tau_1$ splitter, dvs. der findes en $*$-homomorfi
$\rho : C(X) \to \mathbb{B}(H)$, så $\tau_1 = \pi\rho$. Da $\pi\rho(C(X)) = \tau_1(C(X))$, er $\rho(C(X)) \subseteq \pi^{-1}\tau_1(C(X)) = \mathcal{E}_1$, så vi har faktisk en afbildning $\rho : C(X) \to \mathcal{E}_1$. Endelig fås for $f \in C(X)$

$$(\varphi_1\rho)(f) = ({\tau_1}^{-1}\pi)(\rho(f)) = {\tau_1}^{-1}\tau_1(f) = f = \mathrm{id}_{C(X)}(f)\,.$$

Dette viser at $(\mathcal{E}_1, \varphi_1)$ splitter, og dermed fundamentallemmaet. □

**Definition 1.6** Med $\mathrm{Ext}(X)$, $\mathrm{Hom}(X)$ og $\mathrm{Mon}(X)$ betegnes mængden af ækvivalensklasser i resp. $\mathcal{E}xt(X)$, $\mathcal{H}om(X)$ og $\mathcal{M}on(X)$ med hensyn til $\sim$. Ækvivalensklasser med hensyn til $\sim$ betegnes med $[\,\cdot\,]$.

Fundamentallemmaet giver en kanonisk bijektion mellem $\mathrm{Ext}(X)$ og $\mathrm{Mon}(X)$. Vi skal senere vise, at mængden af trivielle elementer i $\mathcal{M}on(X)$ udgør en ækvivalensklasse, og det vil de trivielle elementer i $\mathcal{E}xt(X)$ derfor også gøre. Vi vil fremover gøre hyppigt brug af identifikationen af $\mathrm{Ext}(X)$ med $\mathrm{Mon}(X)$. Vi vil også indføre en komposition på $\mathrm{Mon}(X)$, som vi via bijektionen kan trække tilbage til en komposition i $\mathrm{Ext}(X)$. Først et vigtigt eksempel på extensioner.

## 1.2 Essentielt normale operatorer.

**Definition 1.7** En operator $T \in \mathbb{B}(H)$ kaldes essentielt normal, såfremt $\pi(T)$ er normal i Calkinalgebraen $Q(H)$, altså hvis $T^*T - TT^* \in \mathcal{K}$.

Vi skal nu se, hvorledes en essentielt normal operator $T \in \mathbb{B}(H)$ giver anledning til en extension af $\mathcal{K}$ med $C(\mathrm{sp}_{ess}(T))$. Vi sætter

$$\mathcal{E}_T \;=\; \pi^{-1}(C^*(\pi(T), \pi(I)))\,,$$

der klart er en $C^*$-delalgebra af $\mathbb{B}(H)$ indeholdende $\mathcal{K}$ og enheden $I \in \mathbb{B}(H)$, samt $T$. Vi har endda følgende konkrete billede

$$\mathcal{E}_T = C^*(T, I) + \mathcal{K}\,, \tag{1}$$

thi $\supseteq$ er klar, og $\subseteq$ ses således : Hvis $S \in \mathcal{E}_T$, vil $\pi(S) \in C^*(\pi(T), \pi(I))$. Vi kan derfor finde en følge $(p_n)$ af polynomier i to variable, således at $\lim \pi(p_n(T, T^*)) = \pi(S)$. Da $\pi(C^*(T, I))$ er en afsluttet delmængde af $Q(H)$, må $\pi(S) \in \pi(C^*(T, I))$ - altså er $S \in C^*(T, I) + \mathcal{K}$.

Ovenstående holder selvfølgelig for hvert $T \in \mathbb{B}(H)$. Men i tilfældet, hvor $T$ er essentielt normal, kan vi betragte funktionskalkylen for $\pi(T)$ :

$$\Phi_T \;:\; C(\mathrm{sp}_{ess}(T)) \to C^*(\pi(T), \pi(I)) \quad , \quad f \;\mapsto\; f(\pi(T))\,.$$

Lad $\pi' : \mathcal{E}_T \to C^*(\pi(T), \pi(I))$ være $*$-homomorfien $\pi$, blot opfattet som afbildning af $\mathcal{E}_T$ på billedet. Da er selvfølgelig $\pi'$ surjektiv og har $\mathcal{K}$ som kerne. Med $\varphi_T = \Phi_T^{-1}\,\pi'$ får vi derfor en exakt følge

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}_T \xrightarrow{\varphi_T} C(\mathrm{sp}_{ess}(T)) \longrightarrow 0.$$

Derfor definerer $(\mathcal{E}_T, \varphi_T)$ et element i $\mathcal{E}xt(\mathrm{sp}_{ess}(T))$. Det er klart, at $\varphi_T(I) = 1$ og $\varphi_T(T) = z$, hvor $z : \mathrm{sp}_{ess}(T) \hookrightarrow \mathbb{C}$ er inklusionsafbildningen. Vi noterer

**Sætning 1.8** *Hvis $T$ er en essentielt normal operator, da giver $T$ anledning til en extension*

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}_T \xrightarrow{\varphi_T} C(\mathrm{sp}_{ess}(T)) \longrightarrow 0$$

*af $\mathcal{K}$ med $C(\mathrm{sp}_{ess}(T))$. Her er $\mathcal{E}_T = C^*(T, I) + \mathcal{K}$, og $\varphi_T$ sender $T$ over i inklusionsafbildningen $z : \mathrm{sp}_{ess}(T) \hookrightarrow \mathbb{C}$.*

**Definition 1.9** Hvis $S, T \in \mathbb{B}(H)$, da kaldes $S$ og $T$ unitært ækvivalente modulo de kompakte operatorer (eller kort : *kompalente*), såfremt der findes $U \in \mathcal{U}(H)$ med $S - UTU^* \in \mathcal{K}$, altså $\pi(S) = \pi(U)\pi(T)\pi(U^*)$.

Man ser, at der herved er defineret en ækvivalensrelation $\sim_c$ i $\mathbb{B}(H)$, som vi kalder kompalens. Den næste sætning udtaler sig om, hvorledes man for essentielt normale operatorer kan udtale sig om kompalens ved hjælp af extensionsteori.

**Sætning 1.10** *Lad $T_1, T_2 \in \mathbb{B}(H)$ være essentielt normale. Da er følgende betingelser ækvivalente*

(1) *$T_1$ og $T_2$ er kompalente.*
(2) *$T_1$ og $T_2$ har samme essentielle spektrum $X$, og $\mathcal{E}_{T_1}$, $\mathcal{E}_{T_2}$ er ækvivalente extensioner af $\mathcal{K}$ med $C(X)$.*

**Bevis.** For nemheds skyld skrives $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{T_i}$ og $\varphi_i = \varphi_{T_i}$ for $i = 1, 2$.
(1) $\Rightarrow$ (2). Antag $T_1$ og $T_2$ er kompalente. Find $U \in \mathcal{U}(H)$ med $\pi(T_1) = \pi(U)\pi(T_2)\pi(U^*)$. Heraf fremgår det, at $T_1$ og $T_2$ har samme essentielle spektrum $X$. Sættes $\psi = \operatorname{Ad} U$ skal det vises, at

$$\psi(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2 \quad \text{og} \quad \varphi_2\psi = \varphi_1.$$

Da $\psi(I) = I \in \mathcal{E}_2$ , $\psi(T_1) \in T_2 + \mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}_2$ og $\psi(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}_2$, vil $\psi(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{E}_2$. Tilsvarende vises $\psi^{-1}(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{E}_1$, og man konkluderer $\psi(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2$. For at vise, at $\varphi_2\psi = \varphi_1$, er det nok at vise $\varphi_2\psi(K) = \varphi_1(K)$ for enhver kompakt $K \in \mathcal{K}$, $\varphi_2\psi(T_1) = \varphi_1(T_1)$ og $\varphi_2\psi(I) = \varphi_1(I)$. Dette ses således :

For $K \in \mathcal{K}$ er $\varphi_2\psi(K) = 0 = \varphi_1(K)$. Endvidere er $\psi(T_1) - T_2 \in \mathcal{K}$, og derfor $\varphi_2\psi(T_1) = \varphi_2(T_2) = z = \varphi_1(T_1)$. Endelig viser udregningen $\varphi_2\psi(I) = \varphi_2(I) = 1 = \varphi_1(I)$ det ønskede.
(2) $\Rightarrow$ (1). Antag (2) og lad $U \in \mathcal{U}(H)$ være valgt, så $\psi = \operatorname{Ad} U$ implementerer ækvivalensen. Vi finder så

$$\begin{aligned}
\varphi_2(T_2 - UT_1U^*) &= \varphi_2(T_2) - \varphi_2\psi(T_1) \\
&= \varphi_2(T_2) - \varphi_1(T_1) \\
&= z - z \;=\; 0\,,
\end{aligned}$$

og derfor er $T_2 - UT_1U^* \in \operatorname{Ker}\varphi_2 = \mathcal{K}$. Altså er $T_1$ og $T_2$ kompalente. □

Vi har hermed set, at extensioner optræder som en naturlig ingrediens i operatorteorien, og dette burde være nok til at retfærdiggøre studiet af extensioner af $\mathcal{K}$ med $C(X)$.

## 1.3 Cuntz-isometrier.

Dette afsnit er en lille diskussion om nogle generelle vigtige afbildninger, som konsekvent bliver benyttet i de efterfølgende paragraffer. Fremgangsmåden (Cuntz-isometrier) er ikke standard i den litteratur, vi har benyttet. Derimod har M. Rørdam hele tiden peget på, at dette kunne være en fornuftig fremstilling.

For $k = 1, 2$ betragtes de begrænsede operatorer

$$\begin{aligned}
p_k &: H^2 \to H \text{ , projektionen på } k^{\text{te}} \text{ koordinat} \\
\iota_k &: H \to H^2 \text{ , indlejringen } k^{\text{te}} \text{ koordinat.}
\end{aligned}$$

Her er $p_k$ afstandsformindskende og $\iota_k$ en isometri opfyldende

$$p_k^* = \iota_k \quad , \quad \iota_1 p_1 + \iota_2 p_2 = \mathrm{id}_{H^2} \quad , \quad p_k\iota_k = \mathrm{id}_H \quad , \quad p_k\iota_l = 0 \text{ for } k \neq l.$$

Dernæst får vi brug for at minde om den velkendte $*$-isomorfi

$$\Omega : M_2(\mathbb{B}(H)) \longrightarrow \mathbb{B}(H^2),$$

som er givet ved

$$\Omega\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}x_1 + T_{12}x_2 \\ T_{21}x_1 + T_{22}x_2 \end{pmatrix},$$

eller om man vil

$$\Omega\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \sum_{k,l=1}^{2} \iota_k T_{kl} p_l \ .$$

$\Omega$ har den inverse $\Omega^{-1}$, bestemt ved udtrykket

$$\Omega^{-1}(T) = \begin{pmatrix} p_1 T \iota_1 & p_1 T \iota_2 \\ p_2 T \iota_1 & p_2 T \iota_2 \end{pmatrix}.$$

**Definition 1.11** Hvis $H_1$ og $H_2$ er Hilbertrum og hvis $V_i \in \mathbb{B}(H_i)$, da betegner $V_1 \oplus V_2$ som sædvanlig operatoren i $\mathbb{B}(H_1 \oplus H_2)$ givet ved, at $V_i$ virker på $i^{\text{te}}$ plads, $i = 1, 2$.

Bemærk straks, at når $U, V \in \mathbb{B}(H)$, da er altså

$$U \oplus V = \Omega\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \in \mathbb{B}(H^2).$$

**Definition 1.12** Hvis $S_1$ og $S_2$ er isometrier i $\mathbb{B}(H)$ opfyldende $S_1S_1^* + S_2S_2^* = I$, da kaldes $(S_1, S_2)$ for er par af Cuntz-isometrier i $\mathbb{B}(H)$.

**Bemærkning 1.13** Cuntz-algebraen $\mathcal{O}_n$ kan defineres som $C^*$-algebraen frembragt af $n$ elementer $S_1, \ldots, S_n$ opfyldende $S_i^*S_i = 1$ og $\sum_{i=1}^n S_iS_i^* = 1$. Disse algebraer blev for første gang studeret af J. Cuntz i [3].

**Sætning 1.14** *For Hilbertrummet $H$ gælder*

(1) *Der findes et par af Cuntz-isometrier i $\mathbb{B}(H)$.*
(2) *Hvis $(S_1, S_2)$ er et par af Cuntz-isometrier i $\mathbb{B}(H)$, da vil $S_1^*S_2 = S_2^*S_1 = 0$ samt $S_1^*S_1 = S_2^*S_2 = I$.*
(3) *Hvis $(S_1, S_2)$ og $(T_1, T_2)$ er par af Cuntz-isometrier i $\mathbb{B}(H)$, da er $U = S_1T_1^* + S_2T_2^* \in \mathcal{U}(H)$ med $S_i = UT_i$ for $i = 1, 2$.*

**Bevis.** (1) Da $H$ er $\infty$-dimenisonalt findes afsluttet underrum $L$ af $H$ så $\dim(L) = \dim(L^\perp) = \dim(H)$. Hvis $P_1$ er projektionen på $L$, er $P_2 = I - P_1$ projektionen på $L^\perp$, og åbenbart

$$\dim P_1(H) = \dim P_2(H) = \dim I(H).$$

Altså er $P_i$ Murray-von Neumann ækvivalent med $I$, og vi kan derfor finde $S_i \in \mathbb{B}(H)$ med $S_i^*S_i = I$ og $S_iS_i^* = P_i$. Dermed er $(S_1, S_2)$ er par af Cuntz-isometrier.
(2) Identiteten $S_i^*S_i = I$ er fordi $S_i$ er en isometri. Da $S_2^*S_1 = (S_1^*S_2)^*$, er det nok at vise $S_1^*S_2 = 0$. Idet

$$S_1^* = S_1^*I = S_1^*S_1S_1^* + S_1^*S_2S_2^* = S_1^* + S_1^*S_2S_2^*,$$

er altså $S_1^* S_2 S_2^* = 0$, og derfor

$$\|S_1^* S_2\|^2 \;=\; \|(S_1^* S_2)(S_1^* S_2)^*\| \;=\; \|(S_1^* S_2 S_2^*) S_1\| \;=\; 0\,.$$

(3) Af (2) følger $UT_i = S_i$. En udregning giver

$$\begin{aligned} UU^* &= (S_1T_1^* + S_2T_2^*)(T_1S_1^* + T_2S_2^*) \\ &= S_1T_1^*T_1S_1^* + S_1T_1^*T_2S_2^* + S_2T_2^*T_1S_1^* + S_2T_2^*T_2S_2^* \\ &= S_1S_1^* + S_2S_2^* \\ &= I\,, \end{aligned}$$

og tilsvarende $U^*U = I$. Altså $U \in \mathcal{U}(H)$. □

**Definition 1.15** For et par $S = (S_1, S_2)$ af Cuntz-isometrier i $\mathbb{B}(H)$ defineres $\Lambda_S : \mathbb{B}(H) \to M_2(\mathbb{B}(H))$ samt $\Gamma_S : Q(H) \to M_2(Q(H))$ ved

$$\Lambda_S(T) \;=\; \begin{pmatrix} S_1^*TS_1 & S_1^*TS_2 \\ S_2^*TS_1 & S_2^*TS_2 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_S(a) \;=\; \begin{pmatrix} \pi(S_1^*)a\pi(S_1) & \pi(S_1^*)a\pi(S_2) \\ \pi(S_2^*)a\pi(S_1) & \pi(S_2^*)a\pi(S_2) \end{pmatrix}$$

for $T \in \mathbb{B}(H)$ og $a \in Q(H)$.

Det er ganske enkelt at vise, at der herved defineres unitale $*$-isomorfier med inverser

$$\Lambda_S^{-1}\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \;=\; \textstyle\sum_{i,j=1}^2 S_iT_{ij}S_j^*$$

$$\Gamma_S^{-1}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \;=\; \textstyle\sum_{i,j=1}^2 \pi(S_i)a_{ij}\pi(S_j^*)\,,$$

hvor $T_{ij} \in \mathbb{B}(H)$ og $a_{ij} \in Q(H)$. Endvidere har vi det kommutative diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B}(H) \arrow[r, "\Lambda_S"] \arrow[d, "\pi"'] & M_2(\mathbb{B}(H)) \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ Q(H) \arrow[r, "\Gamma_S"] & M_2(Q(H)) \end{tikzcd}$$

hvor selvfølgelig

$$\tilde{\pi}\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(T_{11}) & \pi(T_{12}) \\ \pi(T_{21}) & \pi(T_{22}) \end{pmatrix} \qquad , \quad T_{ij} \in \mathbb{B}(H)\,.$$

**Sætning 1.16** *Hvis $S = (S_1, S_2)$ er et par af Cuntz-isometrier i $\mathbb{B}(H)$, da findes unitær $W \in \mathbb{B}(H^2, H)$ så*

$$\Lambda_S^{-1}\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \;=\; W(T_1 \oplus T_2)W^*$$

*for alle $T_1, T_2 \in \mathbb{B}(H)$.*

**Bevis.** Sæt $W = S_1p_1 + S_2p_2 \in \mathbb{B}(H^2, H)$. Det er da ganske let at indse $WW^* = \mathrm{id}_H$ og $W^*W = \mathrm{id}_{H^2}$. Altså er $W$ unitær. Identiteten følger af udregningen

$$\begin{aligned} W(T_1 \oplus T_2)W^* &= (S_1p_1 + S_2p_2)(\iota_1T_1p_1 + \iota_2T_2p_2)(\iota_1S_1^* + \iota_2S_2^*) \\ &= (S_1T_1p_1 + S_2T_2p_2)(\iota_1S_1^* + \iota_2S_2^*) \\ &= S_1T_1S_1^* + S_2T_2S_2^* \\ &= \Lambda_S^{-1}\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

### 1.4 En komposition på $\mathbf{Ext}(X)$.

**Definition 1.17** For $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{H}om(X)$ defineres

$$\mathrm{diag}(\tau_1, \tau_2) : C(X) \to M_2(Q(H)) \quad , \quad f \;\mapsto\; \begin{pmatrix} \tau_1(f) & 0 \\ 0 & \tau_2(f) \end{pmatrix}.$$

For par $S = (S_1, S_2)$ af Cuntz-isometrier i $\mathbb{B}(H)$ sættes dernæst

$$\tau_1 \oplus_S \tau_2 \;=\; \Gamma_S^{-1}\,\mathrm{diag}(\tau_1, \tau_2) \;:\; C(X) \to Q(H)\,.$$

**Bemærkning 1.18** Det ses let, at ovenstående afbildninger faktisk *er* unitale $*$-homomorfier, og $\oplus_S$ definerer således en komposition i $\mathcal{H}om(X)$. Endvidere fremgår det, at hvis enten $\tau_1$ eller $\tau_2$ tilhører $\mathcal{M}on(X)$, da vil også $\tau_1 \oplus_S \tau_2$ tilhøre $\mathcal{M}on(X)$ - specielt vil $\oplus_S$ definere en komposition i $\mathcal{M}on(X)$.

**Lemma 1.19** *For par $S = (S_1, S_2)$ af Cuntz-isometrier i $\mathbb{B}(H)$ samt $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in \mathcal{H}om(X)$ gælder*

(1) *Hvis $\tau_1 \sim \sigma_1$ og $\tau_2 \sim \sigma_2$, da vil $(\tau_1 \oplus_S \tau_2) \sim (\sigma_1 \oplus_S \sigma_2)$*
(2) $(\tau_1 \oplus_S \tau_2) \sim (\tau_2 \oplus_S \tau_1)$
(3) $\tau_1 \oplus_S (\tau_2 \oplus_S \tau_3) \sim (\tau_1 \oplus_S \tau_2) \oplus_S \tau_3$.

**Bevis.** Antag $\tau_i \sim \sigma_i$, dvs. der findes $U_i \in \mathcal{U}(H)$ så $\tau_i = \mathrm{Ad}\,\pi(U_i)\,\sigma_i$. Dermed bliver

$$W_1 \;=\; \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \;\in\; \mathcal{U}(M_2(\mathbb{B}(H)))\,,$$

hvorfor $V_1 = \Lambda_S^{-1}(W_1) \in \mathcal{U}(H)$. Man tjekker let, at

$$\tau_1 \oplus_S \tau_2 \;=\; \mathrm{Ad}\,\pi(V_1)\,(\sigma_1 \oplus_\varphi \sigma_2),$$

som ønsket. Vedrørende næste ækvivalens bemærkes at

$$W_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \;\in\; \mathcal{U}(M_2(\mathbb{B}(H))),$$

hvorfor også $V_2 = \Lambda_S^{-1}(W_2) \in \mathcal{U}(H)$. Herefter vises

$$\tau_2 \oplus_S \tau_1 \;=\; \mathrm{Ad}\,\pi(V_2)\,(\tau_1 \oplus_S \tau_2).$$

Dette viser anden påstand. For den sidste påstand sættes

$$W_3 \;=\; \begin{pmatrix} S_1^* & 0 \\ S_1S_2^* & S_2 \end{pmatrix} \;\in\; M_2(\mathbb{B}(H)).$$

Man viser nu, at faktisk $W_3$ er unitær i $M_2(\mathbb{B}(H))$, hvorfor også $V_3 = \Lambda_S^{-1}(W_3) \in \mathcal{U}(H)$. Lidt regnearbejde viser nu

$$\tau_1 \oplus_S (\tau_2 \oplus_S \tau_3) \;=\; \operatorname{Ad}\pi(V_3)\,((\tau_1 \oplus_S \tau_1) \oplus_S \tau_3)\,,$$

og dermed lemmaet. □

Man kan spørge sig selv hvad der sker hvis man benytter et andet par $T = (T_1, T_2)$ af Cuntz-isometrier i stedet for. Svaret er

**Lemma 1.20** *Hvis $S = (S_1, S_2)$ og $T = (T_1, T_2)$ begge er par af Cuntz-isometrier i $\mathbb{B}(H)$ og hvis $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{H}om(X)$, da vil $\tau_1 \oplus_S \tau_2 \sim \tau_1 \oplus_T \tau_2$.*

**Bevis.** Ifølge sætning 1.14 findes $U \in \mathcal{U}(H)$ så $S_i = UT_i$. For $f \in C(X)$ er derfor

$$\begin{aligned}
[\operatorname{Ad}\pi(U)\,(\tau_1 \oplus_T \tau_2)](f) &= \pi(U)\,(\tau_1 \oplus_T \tau_2)(f)\,\pi(U^*) \\
&= \pi(U)\,[\pi(T_1)\tau_1(f)\pi(T_1^*) + \pi(T_2)\tau_2(f)\pi(T_2^*)]\,\pi(U^*) \\
&= \pi(S_1)\tau_1(f)\pi(S_1^*) + \pi(S_2)\tau_2(f)\pi(S_2^*) \\
&= (\tau_1 \oplus_S \tau_2)(f)\,,
\end{aligned}$$

hvilket viser det ønskede. □

Dette betyder, at vi får en veldefineret, associativ og kommutativ komposition $+$ i Mon$(X)$, ved at sætte

$$[\tau_1] + [\tau_2] \;=\; [\tau_1 \oplus_S \tau_2]\,, \tag{2}$$

hvor $S = (S_1, S_2)$ er et eller andet par af Cuntz-isometrier i $\mathbb{B}(H)$. Selv om kompositionen $+$ ikke er afhængig af valget af $S$. Det vil dog være bekvemt at arbejde med et fastholdt par $S = (S_1, S_2)$, og dette vil vi gøre, hvis ikke andet er nævnt. I dette tilfælde vil vi af notationsmæssige grunde blot skrive $\oplus$ i stedet for $\oplus_S$. Tilsvarende skrives $\Lambda$ og $\Gamma$ i stedet for $\Lambda_S$ og $\Gamma_S$. Vi nævner her

**Lemma 1.21** *Hvis $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{H}om(X)$ splitter, da vil også $\tau_1 \oplus \tau_2$ splitte.*

**Bevis.** Find $*$-homomorfier $\rho_i : C(X) \to \mathbb{B}(H)$, så $\tau_i = \pi\rho_i$. Definer herefter $*$-homomorfien

$$\rho = \Lambda^{-1}\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \;:\; C(X) \to \mathbb{B}(H). \tag{3}$$

For $f \in C(X)$ gælder da

$$\begin{aligned}
(\pi\rho)(f) &= \pi\,\Lambda^{-1}\begin{pmatrix} \rho_1(f) & 0 \\ 0 & \rho_2(f) \end{pmatrix} \\
&= \Gamma^{-1}\begin{pmatrix} \pi\rho_1(f) & 0 \\ 0 & \pi\rho_2(f) \end{pmatrix} \\
&= (\Gamma^{-1}\operatorname{diag}(\tau_1, \tau_2))(f) \\
&= (\tau_1 \oplus \tau_2)(f).
\end{aligned}$$

Dette viser at $\tau_1 \oplus \tau_2$ splitter. □

# 2 Positive afbildninger.

## 2.1 Fuldstændigt positive afbildninger, Stinesprings sætning.

Hvis $\mathcal{A}$ er en $C^*$-algebra, da betegnes med $\mathcal{A}^+$ mængden af positive elementer i $\mathcal{A}$. Hvis $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ er en afbildning mellem $C^*$-algebraer, induceres afbildninger $\varphi^{(n)} : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B})$ ved $[a_{ij}] \mapsto [\varphi(a_{ij})]$.

**Definition 2.1** Vi siger, at afbildningen $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ er *positiv*, såfremt $\varphi$ er lineær og sender positive elementer i positive elementer, i.e. $\varphi(\mathcal{A}^+) \subseteq \mathcal{B}^+$. Keglen af positive afbildninger betegnes med $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Vi siger, at $\varphi$ er *fuldstændigt positiv*, såfremt $\varphi^{(n)}$ er positiv for hvert $n \in \mathbb{N}$. Mængden af fulstændigt positive afbildninger betegnes med $\mathcal{P}^\infty(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Hvis $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ er unitale, da sættes

$$\mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \quad = \quad \{\psi \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid \psi(1) = 1\}.$$

**Sætning 2.2** *Lad $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ være positiv, og antag yderligere, at $\mathcal{A}$ er unital. Da er $\varphi$ kontinuert med operatornorm $\|\varphi\| \le 2\|\varphi(1_\mathcal{A})\|_\mathcal{B}$.*

**Bevis.** Der benyttes en del funktionskalkyle i det følgende. Vi tilføjer en enhed $1_\mathcal{B}$ til $\mathcal{B}$ om nødvendigt. For $a \in \mathcal{A}_{sa}$ kan vi skrive $a = a^+ - a^-$, hvor $a^+$ og $a^-$ er positive elementer med norm $\le \|a\|$. Hvis $\|a\| \le 1$, er $0 \le a^+ \le 1_\mathcal{A}$ og derfor er $0 \le \varphi(a^+) \le \varphi(1_\mathcal{A})$. Da også $\varphi(1_\mathcal{A}) \le \|\varphi(1_\mathcal{A})\|_\mathcal{B} 1_\mathcal{B}$, og da tilsvarende resultater gælder for $a^-$, opnår vi at

$$-\|\varphi(1_\mathcal{A})\|_\mathcal{B} 1_\mathcal{B} \le \varphi(a) \le \|\varphi(1_\mathcal{A})\|_\mathcal{B} 1_\mathcal{B}$$

og derfor er $\|\varphi(a)\|_\mathcal{B} \le \|\varphi(1_\mathcal{A})\|_\mathcal{B}$. Hvis $a' \in \mathcal{A}$ opfylder $\|a'\|_\mathcal{A} \le 1$, kan vi splitte $a'$ i realdel og imaginærdel (begge af norm $\le 1$) og opnå vurderingen $\|\varphi(a')\|_\mathcal{B} \le 2\|\varphi(1_\mathcal{A})\|_\mathcal{B}$. Hermed er $\varphi$ begrænset på enhedskuglen (med den ønskede vurdering) og derfor kontinuert. □

I det næste lemma har vi strengt taget kun brug for den lette vej, men vi nævner alligevel

**Lemma 2.3** *Lad $\mathcal{A}$ være en $C^*$-algebra og $X$ et kompakt Hausdorff rum. For $f \in C(X, M_n(\mathcal{A}))$ gælder*

$$f \ge 0 \ i \ C(X, M_n(\mathcal{A})) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X \ : \ f(x) \ge 0 \ i \ M_n(\mathcal{A}).$$

**Bevis.** "$\Rightarrow$" er klar, da evaluering er en $*$-homomorfi.
"$\Leftarrow$" Sæt $g(x) = f(x)^{\frac{1}{2}}$. Vi vil vise, at $g$ er kontinuert, hvormed altså $f = g^* g$ er positiv. Da $\mathrm{sp}(f(x)) \subseteq \mathrm{sp}(f)$, følger det, at $K = [0, \|f\|]$ er en kompakt mængde, der indeholder $\mathrm{sp}(f(x))$ for alle $x \in X$. Da $x \mapsto x^{1/2}$ er kontinuert på $K$, følger påstanden. □

**Lemma 2.4** *Hvis $\mathcal{A}$ er en unital $C^*$-algebra og $a \in \mathcal{A}^+$, da gælder for $T \in M_n(\mathbb{C})^+$, at $aT \in M_n(\mathcal{A})^+$.*

**Bevis.** Skriv $a = b^* b$, og find at $aT = (bI)^* T (bI)$. □

**Sætning 2.5** *Lad $X$ være et kompakt Hausdorff rum og $\mathcal{A}$ en unital $C^*$-algebra. Da er enhver positiv afbildning $\varphi : C(X) \to \mathcal{A}$ fuldstændigt positiv.*

*Bevis.* Der består en naturlig isomorfi $M_n(C(X)) \simeq C(X, M_n(\mathbb{C}))$.
$1^o$. Bemærk først, at hvis $F \in C(X, M_n(\mathbb{C}))$ har formen $F(x) = f(x)T$ for et positivt element $T$ i $M_n(\mathbb{C})$ og $f \in C(X)$, da er

$$\varphi^{(n)}(F) \;=\; [\varphi(f)t_{ij}] \;=\; \varphi(f)T.$$

Specielt ser man, at hvis $f \geq 0$, vil $\varphi(f) \geq 0$ og dermed $\varphi^{(n)}(F) \geq 0$ i $M_n(\mathcal{A})$ ifølge lemma 2.4.
$2^o$. Lad nu $F \in C(X, M_n(\mathbb{C}))^+$ være givet. Da $F(X)$ er en kompakt delmængde af $M_n(\mathbb{C})^+$, kan vi til givet $\varepsilon > 0$ finde endeligt mange kugler

$$K(F(x_1), \varepsilon), \ldots, K(F(x_n), \varepsilon),$$

der overdækker $F(X)$. Lader vi $O_1, \ldots, O_n$ være originalmængderne til disse haves altså en åben overdækning af $X$. Lad $p_1, \ldots, p_n$ være en hertil hørende deling af enheden og sæt $T_i = F(x_i) \geq 0$. For hvert $x \in X$ har vi da

$$\begin{aligned} \|F(x) - \sum_{i=1}^{n} p_i(x)T_i\| \;&\leq\; \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\|F(x) - F(x_i)\| \\ &<\; \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

idet $\|F(x)-F(x_i)\| < \varepsilon$ for $x \in X$ med $p_i(x) > 0$. Bemærk at funktionen $T(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)T_i$ opfylder at $\varphi^{(n)}(T) \geq 0$ som sum af funktioner fra $1^o$, og at $T$ opfylder $\|T - F\|_\infty \leq \varepsilon$.

Vi kan altså approksimere $F$ vilkårligt godt i $C(X, M_n)$ med elementer $T$ med den egenskab, at $\varphi^{(n)}(T) \geq 0$. Da $\varphi$ er kontinuert ifølge sætning 2.2, bliver $\varphi^{(n)}$ kontinuert. Endelig bliver $\varphi^{(n)}(F) \geq 0$, da den positive kegle i $M_n(\mathcal{A})$ er afsluttet. $\square$

**Sætning 2.6 (Stinespring)** *Lad $\mathcal{A}$ være en separabel, unital $C^*$-algebra, og lad $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ være en fuldstændigt positiv unital afbildning. Da findes et separabelt Hilbertrum $K$, en lineær isometri $V : H \to K$ samt en unital $*$-homomorfi $\sigma : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(K)$, således at der for alle $a \in \mathcal{A}$ gælder*

$$\varphi(a) \;=\; V^{-1}P_{V(H)}\sigma(a)V,$$

*hvor $P_{V(H)}$ betegner projektionen på $V(H)$ i $K$.*

**Bevis.** Lad $\mathcal{A} \otimes H$ betegne det algebraiske tensorprodukt af vektorrummene $\mathcal{A}$ og $H$. Vi definerer en form på $\mathcal{A} \otimes H$ ved

$$\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes x_j, \sum_{i=1}^{m} b_i \otimes y_i \rangle \;=\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (\varphi(b_i^* a_j)x_j, y_i).$$

Man kan indse, at dette er veldefineret, og da ses det let at være en sesquilinearform på $\mathcal{A} \otimes H$. Formen er også positivt semidefinit, thi sætter vi $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in H^n$ får man

$$\begin{aligned} \langle \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes x_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \rangle \;&=\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (\varphi(a_i^* a_j)x_j, y_i) \\ &=\; (\varphi^{(n)}([a_i^* a_j])\mathbf{x}, \mathbf{x}) \;\geq\; 0, \end{aligned}$$

idet $\varphi$ er fuldstændigt positiv, og

$$[a_i^* a_j] = \begin{pmatrix} a_1^* & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^* & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathcal{A})^+.$$

Af Cauchy-Schwarz´ ulighed $|\langle u,v\rangle| \leq \langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}\langle v,v\rangle^{\frac{1}{2}}$ for $u,v \in \mathcal{A}\otimes H$ følger det, at mængden

$$\begin{aligned} N &= \{ \, v \in \mathcal{A}\otimes H \mid \langle v,v\rangle = 0 \, \} \\ &= \{ \, v \in \mathcal{A}\otimes H \mid \langle v,u\rangle = 0 \text{ for alle } u \in \mathcal{A}\otimes H \} \end{aligned}$$

er et underrum af $\mathcal{A}\otimes H$. På kvotienten $(\mathcal{A}\otimes H)/N$ har vi altså nu et indre produkt, som vi også blot betegner $\langle \cdot,\cdot\rangle$. Lad nu $K$ være fuldstændiggørelsen af $(\mathcal{A}\otimes H)/N$ under det indre produkt $\langle \cdot,\cdot\rangle$. For at indse, at $K$ er separabelt er det nok at vise, at $(\mathcal{A}\otimes H)/N$ er separabelt og hertil er det igen nok at vise, at $\mathcal{A}\otimes H$ er et separabelt seminormeret rum. Da $\mathcal{A}$ og $H$ er separable kan vi finde følger $(a_i)$ og $(x_j)$, der ligger tæt i $\mathcal{A}$ hhv. $H$. Vi ønsker at approksimere en simpel tensor $a\otimes x$ med et element fra dobbeltfølgen $(a_i \otimes x_j)$. Dette er en smal sag, thi

$$\begin{aligned} \|a\otimes x - a_i \otimes x_j\|^2 &= (\varphi(a^*a)x,x) - (\varphi(a_i^*a)x,x_j) \\ &\quad -(\varphi(a^*a_i)x_j,x) + (\varphi(a_i^*a_i)x_j,x_j). \end{aligned}$$

I det følgende vil vi definere en repræsentation $\sigma$ af $\mathcal{A}$ på $K$. Dette gøres i flere skridt, idet vi starter med $(\mathcal{A}\otimes H)/N$. For $a \in \mathcal{A}$ er afbildningen $\mathcal{A}\times H \to \mathcal{A}\otimes H$, givet ved $(b,y) \mapsto ab\otimes y$, bilineær, og den inducerer derfor en lineær afbildning $a\otimes I : b\otimes y \mapsto ab\otimes y$ af $\mathcal{A}\otimes H$ ind i sig selv. Dernæst sætter vi

$$\sigma(a)(\sum_{i=1}^n b_i \otimes y_i \ + \ N) \ = \ \sum_{i=1}^n ab_i \otimes y_i \ + \ N,$$

og vi må indse, at $\sigma(a)$ er en veldefineret afbildning af $(\mathcal{A}\otimes H)/N$ ind i sig selv :
Hertil viser vi, at $(a\otimes I)(N) \subseteq N$. For $v = \sum_1^n a_i \otimes x_i \in N$ har man

$$\begin{aligned} \|(a\otimes I)v\|^2 &= \langle \sum_{j=1}^n aa_j \otimes x_j, \sum_{i=1}^n aa_i \otimes x_i\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (\varphi(a_i^* a^* a a_j)x_j, x_i) \\ &= \langle (a^*a\otimes I)v, v\rangle \ = 0, \end{aligned}$$

så $(a\otimes I)v \in N$.

Vi bemærker dernæst, at $a\otimes I$ opfylder følgende vurdering

$$\|(a\otimes I)(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i)\|^2 \ \leq \ \|a\|_{\mathcal{A}}^2 \| \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i\|^2, \tag{4}$$

hvilket ses således :

$$\begin{aligned} \|(a\otimes I)(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i)\|^2 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (\varphi(a_i^* a^* a a_j)x_j, x_i) \\ &= (\varphi^{(n)}([a_i^* a^* a a_j])\mathbf{x}, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

og idet vi i $M_n(\mathcal{A})$ har, at

$$\begin{aligned}[a_i^* a^* a a_j] &= \begin{pmatrix} a_1^* & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^* & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^*a & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a^*a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &\leq \|a\|^2 \begin{pmatrix} a_1^* & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^* & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \|a\|^2 [a_i^* a_j],\end{aligned}$$

giver positiviteten af $\varphi^{(n)}$ at

$$(\varphi^{(n)}([a_i^* a^* a a_j])\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq \|a\|_{\mathcal{A}}^2 (\varphi^{(n)}([a_i^* a_j])\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \|a\|_{\mathcal{A}}^2 \| \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \|^2,$$

hvilket viser (4).

Vurderingen (4) giver nu let, at $\sigma(a)$ er kontinuert, og da $\sigma(a)$ tillige er lineær, induceres der en kontinuert lineær afbildning $\sigma(a) : K \to K$ opfyldende

$$\sigma(a)[\sum_{i=1}^n b_i \otimes y_i \ + \ N] \ = \ [\sum_{i=1}^n a b_i \otimes y_i \ + \ N].$$

Det er ren rutine at verificere, at afbildningen $a \mapsto \sigma(a)$ er en unital $*$-repræsentation af $\mathcal{A}$ på $\mathbb{B}(K)$.

Vi indlejrer $H$ i $K$ på den naturlige måde : Lad $V : H \to K$ være operatoren defineret ved $Vx = [1 \otimes x \ + \ N]$. Vi ser at $V$ er isometrisk, idet

$$\|Vx\|^2 \ = \ \langle [1 \otimes x \ + N], [1 \otimes x \ + N] \rangle \ = \ (\varphi(1)x, x) \ = \ \|x\|^2.$$

Vi finder nu for $x, y \in H$

$$(V^* \sigma(a) V x, y) \ = \ \langle \sigma(a)[1 \otimes x \ + \ N], [1 \otimes y \ + \ N] \rangle \ = \ (\varphi(a)x, y),$$

og således er $V^* \sigma V = \varphi$. Da $V^* = V^{-1} P_{V(H)}$, kan vi altså skrive

$$\varphi(a) = V^{-1} P_{V(H)} \sigma(a) V.$$

$\square$

**Bemærkning 2.7** I ovenstående sætning kan vi endda opnå, at $V(H)$ har et uendeligdimensionalt komplement i $K$. Dette ses som følger :

Lad $K, V$ og $\sigma$ være som ovenfor. Definer $K' = K \oplus K$ og $\sigma' : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(K')$ ved $\sigma'(a) = \sigma(a) \oplus \sigma(a)$. Man ser, at $\sigma'$ er en unital $*$-homomorfi, da $\sigma$ er det. Definer en lineær isometri $V' : H \to K'$ ved $V'(h) = (V(h), 0)$. Da er $0 \oplus K \subseteq V'(H)^\perp$, hvorfor $\dim V'(H)^\perp = \infty$. Idet $V'(H) = V(H) \oplus 0$ og vi med

$$\begin{aligned} \iota_s &: K \to K \oplus K \\ \pi_s &: K \oplus K \to K \end{aligned}$$

betegner de naturlige indlejringer og projektioner, har vi følgende identiteter

$$P_{V'(H)} = \iota_1 P_{V(H)} \pi_1 \quad V' = \iota_1 V \quad \text{og} \quad V'^{-1} = V^{-1}\pi_1.$$

Nu får vi for hvert $h \in H$, at

$$\begin{aligned}
(V'^{-1} P_{V'(H)} \sigma'(a) V')(h) &= (V'^{-1} P_{V'(H)} \sigma'(a))(V(h), 0) \\
&= V'^{-1} P_{V'(H)} (\sigma(a) V(h), 0) \\
&= V'^{-1} \iota_1 P_{V(H)} \sigma(a) V(h) \\
&= V^{-1} \pi_1 \iota_1 P_{V(H)} \sigma(a) V(h) \\
&= V^{-1} P_{V(H)} \sigma(a) V(h) \\
&= \varphi(a)(h),
\end{aligned}$$

og dette beviser vores påstand. □

**Korollar 2.8** *Lad $\mathcal{A}$ være en unital separabel $C^*$-algebra og $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ være en fuldstændigt positiv unital afbildning. Da findes et separabelt uendeligdimensionalt Hilbertrum $N$ og en unital $*$-repræsentation $\sigma$ på $H \oplus N$, så $\varphi(a) = \sigma_{11}(a)$, når vi skriver*

$$\sigma(a) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(a) & \sigma_{12}(a) \\ \sigma_{21}(a) & \sigma_{22}(a) \end{pmatrix}.$$

**Bevis.** Vi bruger notationen fra sætning 2.6, hvor vi ifølge ovenstående bemærkning kan antage, at $\dim V(H)^\perp = \infty$. Vi har en unitær operator $U : H \oplus V(H)^\perp \to K$, defineret ved at $U : (h, x) \mapsto V(h) + x$, idet jo $K$ er den indre direkte sum af $V(H)$ og $V(H)^\perp$. Lad $\tilde{\sigma}$ betegne repræsentationen $a \mapsto U^{-1}\sigma(a)U$ af $\mathcal{A}$ på $H \oplus V(H)^\perp$. Vi lader

$$\begin{aligned}
\iota_1 &: H \to H \oplus V(H)^\perp \\
p_1 &: H \oplus V(H)^\perp \to H
\end{aligned}$$

betegne indlejringen hhv. projektionen. Da har vi

$$\begin{aligned}
p_1 \tilde{\sigma}(a) \iota_1(h) &= p_1 U^{-1} \sigma(a) U \iota_1(h) \\
&= p_1 U^{-1} \sigma(a) U(h, 0) \\
&= p_1 U^{-1} \sigma(a) V(h) \\
&= V^{-1} P_{V(H)} \sigma(a) V(h) \\
&= \varphi(a)(h),
\end{aligned}$$

idet jo $p_1 U^{-1} = V^{-1} P_{V(H)}$. Vi kan altså bruge $N = V(H)^\perp$. □

Vi viser nu følgende vigtige

**Korollar 2.9 (Stinespring)** *Lad $\mathcal{A}$ være en separabel unital $C^*$-algebra og $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ være en fuldstændigt positiv unital afbildning. Da findes en unital $*$-homomorfi $\sigma : \mathcal{A} \to M_2(\mathbb{B}(H))$, således at $\sigma_{11}(a) = \varphi(a)$, når vi skriver*

$$\sigma(a) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(a) & \sigma_{12}(a) \\ \sigma_{21}(a) & \sigma_{22}(a) \end{pmatrix}.$$

**Bevis.** Lad $N$ være uendeligdimensional, og lad $\bar{\sigma}$ være en repræsentation som i korollar 2.8. Lad $\psi : H \to N$ være unitær, og sæt

$$\sigma(a) = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11}(a) & \bar{\sigma}_{12}(a)\psi \\ \psi^{-1}\bar{\sigma}_{21}(a) & \psi^{-1}\bar{\sigma}_{22}(a)\psi \end{pmatrix}.$$

Da er $\sigma : \mathcal{A} \to M_2(\mathbb{B}(H))$ en unital $*$-homomorfi og $\sigma_{11}(a) = \bar{\sigma}_{11}(a) = \varphi(a)$. □

## 2.2 Fuldstændighed af $\mathcal{P}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Lad i det følgende $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ være unitale $C^*$-algebraer. Med $\mathcal{P}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ betegner vi som før de positive unitale afbildninger fra $\mathcal{A}$ til $\mathcal{B}$. Vi udstyrer $\mathcal{P}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ med topologien $T$ for punktvis konvergens. Hvis algebraen $\mathcal{A}$ er *separabel*, kan vi vælge en tæt følge $(a_n)$ i enhedskuglen for $\mathcal{A}$ og sætte

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\|\varphi(a_n) - \psi(a_n)\| \tag{5}$$

for $\varphi, \psi \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Hermed defineres en metrik på $\mathcal{P}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$, og $d$ inducerer netop topologien for punktvis konvergens. Hvis nemlig $(\varphi_\alpha)$ er et net, så $\varphi_\alpha \to \varphi$ i $T$, da vil $\varphi_\alpha(a_n) \to \varphi(a_n)$ for hvert $n \in \mathbb{N}$. Da vi har vurderingen $\|\varphi_\alpha(a_n)\| \le 2\|\varphi_\alpha(1)\| = 2$, kan vi endelig slutte $d(\varphi_\alpha,\varphi) \to 0$. Hvis omvendt $d(\varphi_\alpha,\varphi) \to 0$, har vi $\varphi_\alpha(a_n) \to \varphi(a_n)$ for hvert $n \in \mathbb{N}$. For $a$ i enhedskuglen finder vi så

$$\begin{aligned} \|\varphi_\alpha(a) - \varphi(a)\| &\le \|\varphi_\alpha(a) - \varphi_\alpha(a_n)\| + \|\varphi_\alpha(a_n) - \varphi(a_n)\| + \|\varphi(a_n) - \varphi(a)\| \\ &\le 2\|a - a_n\| + \|\varphi_\alpha(a_n) - \varphi(a_n)\| + 2\|a_n - a\|. \end{aligned}$$

Heraf fås $\varphi_\alpha(a) \to \varphi(a)$, og dette udvides ved linearitet til at gælde for alle $a \in \mathcal{A}$. Vi viser nu

**Sætning 2.10** *Hvis $\mathcal{A}$ er unital og separabel, da vil metrikken bestemt ved* (5) *gøre $\mathcal{P}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ til et fuldstændigt metrisk rum.*

**Bevis.** Hvis $(\psi_n)$ er en Cauhcy følge i $\mathcal{P}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$, da vil $(\psi_n(a_k))$ være en Cauchy følge for hvert $k \in \mathbb{N}$. For $a$ i enhedskuglen finder vi

$$\begin{aligned} \|\psi_n(a) - \psi_m(a)\| &\le \|\psi_n(a) - \psi_n(a_k)\| + \|\psi_n(a_k) - \psi_m(a_k)\| + \|\psi_m(a_k) - \psi_m(a)\| \\ &\le 4\|a - a_k\| + \|\psi_n(a_k) - \psi_m(a_k)\|. \end{aligned}$$

Dermed er $(\psi_n(a))$ en Cauchy følge for hvert $a$ i enhedskuglen, og dermed for hvert $a \in \mathcal{A}$, og $(\psi_n(a))$ konvergerer derfor mod et element $\psi(a)$. Vi har altså, at $\psi_n(a) \to \psi(a)$ for alle $a \in \mathcal{A}$. Dermed er $\psi \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$, og $d(\psi_n,\psi) \to 0$. □

## 2.3 Løft af positive afbildninger.

Det følgende er taget fra [4], hvor fremstillingen faktisk er udmærket. Vi gengiver den her for fuldstændighedens skyld.

**Sætning 2.11** *Lad $\mathcal{J}$ være et ideal i en unital $C^*$-algebra $\mathcal{A}$, og lad $\pi$ være kvotientafbildningen. Lad $A$ være et positivt element i $\mathcal{A}$ og antag, at $y \in \mathcal{A}/\mathcal{J}$ opfylder $yy^* \le \pi(A)$. Da findes et element $Y \in \mathcal{A}$ med $\pi(Y) = y$ og $YY^* \le A$.*

**Bevis.** Sæt $a = \pi(A)$ og lad $Y$ være et løft af $y$. Sæt nu

$$B = YY^* + |A - YY^*|.$$

Bemærk at $B \geq YY^* + (A - YY^*) = A$, $B \geq YY^*$ og at

$$\pi(B) = yy^* + |a - yy^*| = yy^* + (a - yy^*) = a.$$

Hvis vi sætter $Y_n = A^{1/2}(B + \frac{1}{n}I)^{-1/2}Y$, og

$$D_{nm} = (B + \frac{1}{n}I)^{-1/2} - (B + \frac{1}{m}I)^{-1/2},$$

ser vi, at $Y_n$ er en Cauchy følge, idet vi for $m < n$ har

$$\begin{aligned} \|Y_n - Y_m\|^2 &= \|A^{1/2}D_{nm}YY^*D_{nm}A^{1/2}\| \leq \|A^{1/2}D_{nm}BD_{nm}A^{1/2}\| \\ &= \|B^{1/2}D_{nm}A^{1/2}\|^2 = \|B^{1/2}D_{nm}AD_{nm}B^{1/2}\| \\ &\leq \|B^{1/2}D_{nm}BD_{nm}B^{1/2}\| = \|f_{nm}(B)\|, \end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned} f_{nm}(x) &= x^2\Big((x + \frac{1}{n})^{-1/2} - (x + \frac{1}{m})^{-1/2}\Big)^2 \\ &= \frac{x^2(\frac{1}{m} - \frac{1}{n})^2}{(x + \frac{1}{n})(x + \frac{1}{m})\Big(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x + \frac{1}{m}}\Big)^2} \\ &\leq \Big(\frac{x}{x + \frac{1}{n}}\Big)\Bigg(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x + \frac{1}{m}}}\Bigg)^2\Big(\frac{m^{-2}}{x + \frac{1}{m}}\Big) \leq \frac{1}{4m}. \end{aligned}$$

Det følger, at $(Y_n)$ er en Cauchy følge og dermed konvergent mod et element $Y_\infty \in \mathcal{A}$. Vi ser, at

$$\begin{aligned} Y_nY_n^* &= A^{1/2}(B + \frac{1}{n}I)^{-1/2}YY^*(B + \frac{1}{n}I)^{-1/2}A^{1/2} \\ &\leq A^{1/2}(B + \frac{1}{n}I)^{-1/2}B(B + \frac{1}{n}I)^{-1/2}A^{1/2} \\ &\leq A, \end{aligned}$$

og dermed er $Y_\infty Y_\infty^* \leq A$. Da $\pi(Y_n) = a^{1/2}(a + \frac{1}{n})^{-1/2}y \to y$, følger det, at $\pi(Y_\infty) = y$. Vi kan altså bruge $Y_\infty$ som det ønskede løft. □

**Korollar 2.12** *Lad $\mathcal{A}$ være en unital $C^*$-algebra og lad $\mathcal{J}$ være et ideal i $\mathcal{A}$. Antag at $b \in \mathcal{A}/\mathcal{J}$ opfylder $0 \leq b \leq \pi(A)$ for et $A \in \mathcal{A}$. Da findes et element $B \in \mathcal{A}$, så $\pi(B) = b$ og $0 \leq B \leq A$.*

**Bevis.** Sæt $y = b^{1/2}$ i sætningen ovenfor. □

**Definition 2.13** Vi siger at $\psi \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}/\mathcal{J})$ kan løftes (er løftbar), såfremt der findes $\varphi \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, så $\psi = \pi\varphi$.

**Sætning 2.14** *Lad $\mathcal{A}$ være en unital $C^*$-algebra og lad $\mathcal{J}$ være et ideal i $\mathcal{A}$. Hvis $X$ er et endeligt, diskret rum, da vil ethvert $\rho \in \mathcal{P}_1(C(X), \mathcal{A}/\mathcal{J})$ have et positivt løft $\sigma \in \mathcal{P}_1(C(X), \mathcal{A})$.*

**Bevis.** Lad $X = \{x_1 \dots, x_n\}$ og definer $\delta_i \in C(X)$ til at være indikatorfunktionen for $\{x_i\}$. En lineær afbildning $\psi$, defineret på $C(X)$, er da positiv netop hvis $\psi(\delta_i) \geq 0$ for alle $i$. Sæt nu $a_i = \rho(\delta_i)$ og bemærk, at $\sum_1^n a_i = 1$, da $\rho$ er unital. Vi vil finde $n$ positive løft $A_i$ af $a_i$ opfyldende $\sum_1^n A_i = I$, thi da kan vi sætte $\sigma(\sum_1^n c_i\delta_i) = \sum_1^n c_iA_i$ og finde $\sigma \in \mathcal{P}_1(C(X), \mathcal{A})$ med $\pi\sigma = \rho$. Dette gøres ved at anvende korollar 2.12 succesivt på følgende måde :

I første skridt vælger vi $A_1$, så $0 \leq A_1 \leq I$ og $\pi(A_1) = a_1$. Det næste løft konstrueres ved at bemærke, at $0 \leq a_2 \leq 1 - a_1 = \pi(I - A_1)$, og dernæst benytte ovenstående til at finde $A_2$ med $0 \leq A_2 \leq I - A_1$, så $\pi(A_2) = a_2$. I $k$'te skridt ($k < n$), antages at vi har konstrueret positive løft $A_1, \dots, A_{k-1}$ og at $\sum_1^{k-1} A_i \leq I$. Da finder vi $0 \leq a_k \leq 1 - \sum_1^{k-1} a_i = \pi(I - \sum_1^{k-1} A_i)$ og korollaret giver så et løft $A_k$ af $a_k$ med $I - \sum_1^k A_i \geq 0$. Endelig konstrueres det sidste løft $A_n$ ved at sætte $A_n = I - \sum_1^{n-1} A_i$. Da er $A_n$ rent faktisk et løft af $a_n$, thi $\pi(A_n) = 1 - \sum_1^{n-1} a_i = a_n$. Hermed er det ønskede vist. □

**Sætning 2.15** *Lad $X$ være et kompakt metrisk rum. Da findes en følge $X_k$ af endelige delmængder af $X$, samt afbildninger $\alpha_k \in \mathcal{P}_1(C(X_k), C(X))$ og $\beta_k \in \mathcal{P}_1(C(X), C(X_k))$, således at $\lim \alpha_k\beta_k = \mathrm{id}_{C(X)}$ punktvis.*

**Bevis.** For hvert $k \in \mathbb{N}$ kan vi skrive $X$ som endelig forening af $n_k$ kugler med radius $\frac{1}{k}$, $X = \bigcup_{i=1}^{n_k} K(x_{ki}, \frac{1}{k})$. Sæt $X_k = \{x_{ki} | \, i = 1, \dots, n_k\}$, og definer $*$-homomorfien $\beta_k : C(X) \to C(X_k)$ ved restriktion. Lad $(p_{ki})_{i=1}^{n_k}$ være en deling af enheden hørende til $\frac{1}{k}$−kuglerne, og sæt

$$\alpha_k(g)(x) = \sum_{i=1}^{n_k} g(x_{ki})p_{ki}(x).$$

Så er $\alpha_k$ unital, lineær og positiv.

Lad nu $h \in C(X)$ være valgt vilkårligt. Vi vil vise, at $\alpha_k\beta_k(h) \to h$ i $C(X)$, dvs. uniformt over $X$. Da $X$ er et kompakt metrisk rum er $h$ uniformt kontinuert på $X$, så til givet $\varepsilon > 0$ findes et $k_0$, så

$$\forall x, y \in X : \mathrm{dist}(x, y) < \frac{1}{k_0} \;\Rightarrow\; |h(x) - h(y)| < \varepsilon.$$

For $k \geq k_0$ haves så

$$\begin{aligned} |h(x) - \alpha_k\beta_k(h)(x)| &= |h(x) - \sum_{i=1}^{n_k} h(x_{ki})p_{ki}(x)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_k} |h(x) - h(x_{ki})|p_{ki}(x) < \varepsilon, \end{aligned}$$

thi hvis $p_{ki}(x) > 0$ er $x \in K(x_{ki}, \frac{1}{k})$, og da er $|h(x) - h(x_{ki})| < \varepsilon$. Dette viser påstanden. □

**Lemma 2.16** *Hvis $(e_\lambda)$ er en net af positive elementer af norm højst 1 med egenskaben*

$$\|e_\lambda a - ae_\lambda\| \to 0 \;\; \textit{for alle} \;\; a \in \mathcal{A} \tag{6}$$

*da vil også $(f(e_\lambda))$ have egenskaben (6), når $f \in C([0, 1])$.*

**Bevis.** Lad $0 \neq a \in \mathcal{A}$. Hvis $p$ er et polynomium, ses det let, at

$$\|p(e_\lambda)a - ap(e_\lambda)\| \to 0$$

hvilket følger af vurderingen

$$\begin{aligned}\|e_\lambda^n a - ae_\lambda^n\| &\leq \|e_\lambda^n a - e_\lambda a e_\lambda^{n-1}\| + \|e_\lambda a e_\lambda^{n-1} - ae_\lambda^n\| \\ &= \|e_\lambda^{n-1} a - ae_\lambda^{n-1}\| + \|e_\lambda a - ae_\lambda\|,\end{aligned}$$

som holder for $n > 1$. Et induktionsargument vil da give det ønskede.

Givet et $\varepsilon > 0$ kan vi finde et polynomium $p$ med

$$|p(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3\|a\|} \quad \text{for hvert} \quad t \in [0, 1].$$

Da har vi $\|p(e_\lambda) - f(e_\lambda)\| \leq \frac{\varepsilon}{3\|a\|}$ for hvert $\lambda$. Vælg nu $\lambda_0$, så der for $\lambda \geq \lambda_0$ gælder, at $\|p(e_\lambda)a - ap(e_\lambda)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Da er

$$\begin{aligned}\|f(e_\lambda)a - af(e_\lambda)\| &\leq \|f(e_\lambda)a - p(e_\lambda)a\| + \|p(e_\lambda)a - ap(e_\lambda)\| + \|ap(e_\lambda) - af(e_\lambda)\| \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

for $\lambda \geq \lambda_0$. □

**Lemma 2.17** *Hvis $\mathcal{J}$ er et ideal i en $C^*$-algebra $\mathcal{A}$, og hvis $(E_\lambda)$ er en approximativ enhed for $\mathcal{J}$, da gælder for hvert $A \in \mathcal{A}$, at*

$$\|A - AE_\lambda\| \to \|\pi(A)\|, \tag{7}$$

*hvor $\pi$ er kvotientafbildningen.*

**Bevis.** Da $AE_\lambda$ tilhører $\mathcal{J}$ gælder $\|A - AE_\lambda\| \geq \|\pi(a)\|$. Vælg nu til $\varepsilon > 0$ et $J \in \mathcal{J}$ med $\|A - J\| < \|\pi(A)\| + \varepsilon$. Vi finder så

$$\begin{aligned}\|A - AE_\lambda\| &\leq \|(A - J)(I - E_\lambda)\| + \|J - JE_\lambda\| \\ &\leq \|A - J\| + \|J - JE_\lambda\| \to \|A - J\|,\end{aligned}$$

hvor jo $\|A - J\| < \|\pi(A)\| + \varepsilon$. For hvert $\varepsilon > 0$ har vi altså uligheden

$$\|\pi(a)\| \leq \|A - AE_\lambda\| \leq \|\pi(A)\| + \varepsilon$$

for tilstrækkeligt store $\lambda$. Dette viser, at $\|A - AE_\lambda\| \to \|\pi(A)\|$. □

**Sætning 2.18** *Hvis $\mathcal{A}$ er separabel, $\varphi, \psi \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ og $\mathcal{J}$ er et ideal i $\mathcal{B}$, da har man*

$$d(\pi\varphi, \pi\psi) = \inf\{d(\varphi, \psi') | \ \psi' \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ med } \pi\psi = \pi\psi'\}.$$

**Bevis.** Det er klart, at

$$d(\pi\varphi, \pi\psi) = d(\pi\varphi, \pi\psi') \leq d(\varphi, \psi'),$$

når $\pi\psi = \pi\psi'$. Dette viser uligheden

$$d(\pi\varphi, \pi\psi) \leq \inf_{\psi'} d(\varphi, \psi').$$

Det er den anden ulighed, der er interessant. Hertil betragtes en quasicentral approximativ enhed $(E_\lambda)$ for idealet $\mathcal{J}$. Vi sætter

$$\begin{aligned}
\psi_\lambda(A) &= E_\lambda^{1/2}\varphi(A)E_\lambda^{1/2} + (I-E_\lambda)^{1/2}\psi(A)(I-E_\lambda)^{1/2} \\
\varphi_\lambda(A) &= E_\lambda^{1/2}\varphi(A)E_\lambda^{1/2} + (I-E_\lambda)^{1/2}\varphi(A)(I-E_\lambda)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Man ser let, at $\psi_\lambda, \varphi_\lambda \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ med $\pi\psi_\lambda = \pi\psi$ og $\pi\varphi_\lambda = \pi\varphi$. Vi ser at

$$\begin{aligned}
\|\varphi(A) - \varphi_\lambda(A)\| &= \|\varphi(A)(I-E_\lambda) + \varphi(A)E_\lambda - \varphi_\lambda(A)\| \\
&\leq \|\varphi(A)(I-E_\lambda) - (I-E_\lambda)^{1/2}\varphi(A)(I-E_\lambda)^{1/2}\| \\
&\quad + \|\varphi(A)E_\lambda - E_\lambda^{1/2}\varphi(A)E_\lambda^{1/2}\|,
\end{aligned}$$

der kan vurderes opad ved

$$\|(I-E_\lambda)^{1/2}\varphi(A) - \varphi(A)(I-E_\lambda)^{1/2}\| + \|E_\lambda^{1/2}\varphi(A) - \varphi(A)E_\lambda^{1/2}\|,$$

som går mod nul pga. lemma 2.16. Hermed er vist, at $d(\varphi_\lambda,\varphi) \to 0$. Vi vil nu gerne vise, at

$$\inf_\lambda d(\varphi,\psi_\lambda) \leq d(\pi\varphi,\pi\psi),$$

for dette vil bevise påstanden. Vi finder

$$\begin{aligned}
\inf_\lambda d(\varphi,\psi_\lambda) &\leq \liminf d(\varphi,\psi_\lambda) \\
&\leq \liminf (d(\varphi,\varphi_\lambda) + d(\varphi_\lambda,\psi_\lambda)) \\
&= \liminf d(\varphi_\lambda,\psi_\lambda),
\end{aligned}$$

hvor

$$d(\varphi_\lambda,\psi_\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\|(I-E_\lambda)^{1/2}(\varphi(A_n) - \psi(A_n))(I-E_\lambda)^{1/2}\|. \tag{8}$$

Bemærk at der for $B \in \mathcal{B}$ gælder

$$\begin{aligned}
\|(I-E_\lambda)^{1/2}B(I-E_\lambda)^{1/2}\| &= \|(I-E_\lambda)^{1/2}B(I-E_\lambda)^{1/2} - B(I-E_\lambda)^{1/2}(I-E_\lambda)^{1/2} + B(I-E_\lambda)\| \\
&\leq \|(I-E_\lambda)^{1/2}B - B(I-E_\lambda)^{1/2}\| + \|B(I-E_\lambda)\|.
\end{aligned}$$

Her vil første led gå mod nul ifølge lemma 2.16, medens andet led går mod $\|\pi(B)\|$ ifølge lemma 2.17.

Nu tilbage til (8). Hvis $\varepsilon > 0$ er givet, vælges $N$, så $2^{-N} < \frac{\varepsilon}{8}$. Vælg nu $\lambda_0$ således, at der for $\lambda \geq \lambda_0$ og alle $n \leq N$ gælder, at

$$\|(I-E_\lambda)^{1/2}(\varphi(A_n) - \psi(A_n))(I-E_\lambda)^{1/2}\| \leq \|\pi(\varphi(A_n) - \psi(A_n))\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da har vi

$$\begin{aligned}
d(\varphi_\lambda,\psi_\lambda) &\leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}(\|\pi(\varphi(A_n) - \psi(A_n))\| + \frac{\varepsilon}{2}) + \sum_{n>N} 2^{-n}(\|\varphi\| + \|\psi\|) \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\|\pi\varphi(A_n) - \pi\psi(A_n)\| + \frac{\varepsilon}{2} + 2^{2-N} \leq d(\pi\varphi,\pi\psi) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

for $\lambda \geq \lambda_0$. Derfor er

$$\inf_\lambda d(\varphi, \psi_\lambda) \leq \liminf_\lambda d(\varphi_\lambda, \psi_\lambda) \leq d(\pi\varphi, \pi\psi),$$

som ønsket. □

**Sætning 2.19** *Lad $\mathcal{A}$ være separabel. Da vil mængden af løftbare afbildninger i $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}/\mathcal{J})$ udgør en afsluttet delmængde af $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}/\mathcal{J})$.*

**Bevis.** Lad $(\varphi_n)$ være en følge af løftbare afbildninger, og antag at $\varphi_n \to \varphi$. Vi skal vise, at $\varphi$ også kan løftes. Ved eventuel overgang til en delfølge kan vi antage, at $d(\varphi_n, \varphi_{n+1}) < 2^{-n}$. Vælg et løft $\psi_1$ af $\varphi_1$, og vælg herefter $\psi_n$ rekursivt således at $\pi\psi_n = \varphi_n$, og $d(\psi_n, \psi_{n+1}) < 2^{-n}$ jvf. sætning 2.18. Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(\psi_n, \psi_{n+1}) < \infty,$$

er $(\psi_n)$ en Cauchy følge i $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, der er fuldstændigt. Altså findes $\psi \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, så $\psi_n \to \psi$. Da vil $\varphi_n = \pi\psi_n \to \pi\psi$, og vi slutter, at $\varphi = \pi\psi$. Altså kan $\varphi$ løftes. □

Vi er nu fremme ved målet

**Sætning 2.20** *Lad $X$ være et kompakt metrisk rum, $\mathcal{A}$ en unital $C^*$-algebra med ideal $\mathcal{J}$. Da kan enhver $\varphi \in \mathcal{P}_1(C(X), \mathcal{A}/\mathcal{J})$ løftes til $\mathcal{P}_1(C(X), \mathcal{A})$.*

**Bevis.** For $\varphi \in \mathcal{P}_1(C(X), \mathcal{A}/\mathcal{J})$ betragter vi afbildningerne $\varphi_k = \varphi\alpha_k\beta_k$ med afbildninger som i sætning 2.15. Da $\varphi\alpha_k : C(X_k) \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$ er unital og positiv, kan vi finde et løft $\psi \in \mathcal{P}_1(C(X_k), \mathcal{A})$ af $\varphi\alpha_k$ ifølge sætning 2.14. Da er $\psi\beta_k$ et positivt unitalt løft af $\varphi_k$. Grænseværdien $\varphi = \lim \varphi_k$ kan således også løftes, ifølge sætning 2.19, idet $C(X)$ er separabel. □

## 3 Ext$(X)$ som gruppe.

Vi skal nu vise hvorledes den allerede definerede komposition $+$ på Ext$(X)$ giver en abelsk gruppestruktur. Vi ved allerede at $+$ er kommutativ og associativ, og mangler således kun eksistensen af neutralt og inverst element. Dette er faktisk ikke helt enkelt og kræver noget kendskab til repræsentationer af $C^*$-algebraer.

**Definition 3.1** Lad $\mathcal{A}$ være en $C^*$-algebra, $H_1, H_2$ Hilbertrum og $\psi_i : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H_i)$ $*$-homomorfier.

Da betegner $\psi_1 \oplus \psi_2 : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H_1 \oplus H_2)$ $*$-homomorfien givet ved $(\psi_1 \oplus \psi_2)(a) = \psi_1(a) \oplus \psi_2(a)$ for $a \in \mathcal{A}$. Endvidere skriver vi $\psi_1 \sim_{\mathcal{K}} \psi_2$ når der eksisterer en følge $(U_n)$ af unitære fra $\mathbb{B}(H_1, H_2)$ således at

$$\begin{array}{ll} (i) & \|U_n\psi_1(a)U_n^* - \psi_2(a)\| \to 0 \quad \text{for hvert } a \in \mathcal{A} \\ (ii) & U_n\psi_1(a)U_n^* - \psi_2(a) \in \mathcal{K}(H_2) \quad \text{for alle } a \in \mathcal{A}\,. \end{array}$$

Det er i litteraturen almindeligt, kun at definere ovenstående for $\mathcal{A}$, $H_1$ og $H_2$ separable, men bemærk, at for de følgende to lemmaer er dette uden relevans.

**Lemma 3.2** *Lad $\mathcal{A}$ være en $C^*$-algebra, og lad $\psi_i : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H_i)$ være $*$-homomorfier, $i = 1, 2, 3$. Da gælder*

(1) $\psi_1 \sim_{\mathcal{K}} \psi_1$.
(2) *Hvis $\psi_1 \sim_{\mathcal{K}} \psi_2$, da vil også $\psi_2 \sim_{\mathcal{K}} \psi_1$.*
(3) *Hvis $\psi_1 \sim_{\mathcal{K}} \psi_2$ og $\psi_2 \sim_{\mathcal{K}} \psi_3$, da vil også $\psi_1 \sim_{\mathcal{K}} \psi_3$.*

**Bevis.** (1) og (2) er lette. For (3) bemærkes, at hvis $(U_n)$ implementerer ækvivalensen $\psi_1 \sim_{\mathcal{K}} \psi_2$, og $(V_n)$ implementerer ækvivalensen $\psi_2 \sim_{\mathcal{K}} \psi_3$, da vil $(V_nU_n)$ implementere ækvivalensen $\psi_1 \sim_{\mathcal{K}} \psi_3$, idet jo vi for $a \in \mathcal{A}$ kan skrive $(V_nU_n)\psi_1(a)(V_nU_n)^* - \psi_3(a)$ som

$$V_n(U_n\psi_1(a)U_n^* - \psi_2(a))V_n^* + (V_n\psi_2(a)V_n^* - \psi_3(a))$$

□

**Lemma 3.3** *Antag at $\mathcal{A}$ og $\mathcal{A}'$ er $C^*$-algebraer, og lad $\psi_i : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H_i)$ være $*$-homomorfier, $i = 1, 2$. Hvis $\rho : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ er en $*$-homomorfi, da gælder*

(1) *Hvis $\psi_1 \sim_{\mathcal{K}} \psi_2$, da vil også $\psi_1\rho \sim_{\mathcal{K}} \psi_2\rho$.*
(2) $\psi_1 \oplus \psi_2 \sim_{\mathcal{K}} \psi_2 \oplus \psi_1$.

**Bevis.** (1) Hvis $(U_n)$ implementerer ækvivalensen $\psi_1 \sim_{\mathcal{K}} \psi_2$, vil den samme følge implementere $\psi_1\rho \sim_{\mathcal{K}} \psi_2\rho$.
(2) $U : H_1 \oplus H_2 \to H_2 \oplus H_1$ givet ved $U(h_1, h_2) = (h_2, h_1)$, er selvfølgelig unitær i $\mathbb{B}(H_1 \oplus H_2, H_2 \oplus H_1)$ og opfylder endda

$$U(\psi_1 \oplus \psi_2)(a)U^* = (\psi_2 \oplus \psi_1)(a)$$

for alle $a \in \mathcal{A}$. □

For ikke at fortabe os i alt for mange detaljer på dette område, har vi blot valgt at gengive følgende dybe (se f.eks. [4, side 68])

**Sætning 3.4 (Voiculescu)** *Lad $H_1$ og $H_2$ være $\infty$-dimensionale separable Hilbertrum, $\mathcal{A}$ en unital $C^*$-delalgebra af $\mathbb{B}(H_1)$ og $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H_2)$ en unital $*$-homomorfi med $\varphi(\mathcal{A} \cap \mathcal{K}(H_1)) = 0$. Idet $\mathrm{id} : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H_1)$ betegner indlejringen, gælder nu $\mathrm{id} \sim_{\mathcal{K}} \mathrm{id} \oplus \varphi$.*

**Korollar 3.5** *Antag at $\mathcal{A}$ er en separabel unital $C^*$-algebra, $H_i$ et $\infty$-dimensionalt separabelt Hilbertrum, $\rho_i : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H_i)$ en unital $*$-homomorfi og $\pi_i : \mathbb{B}(H_i) \to Q(H_i)$ kvotientafbildningen, $i = 1, 2$. Hvis yderligere*

$$\mathrm{Ker}(\rho_1) \;=\; \mathrm{Ker}(\pi_1\rho_1) \;=\; \mathrm{Ker}(\rho_2) \;=\; \mathrm{Ker}(\pi_2\rho_2)\,,$$

*da gælder $\rho_1 \sim_{\mathcal{K}} \rho_2$.*

**Bevis.** Vi sætter $\mathcal{A}_i = \mathrm{Im}(\rho_i)$, der er en $C^*$-delalgebra af $\mathbb{B}(H_i)$ indeholdende enheden $I_{H_i}$. Bemærk, at $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{K}(H_i) = 0$ idet $\mathrm{Ker}(\rho_i) = \mathrm{Ker}(\pi_i\rho_i)$. Da $\mathrm{Ker}(\rho_1) = \mathrm{Ker}(\rho_2)$, gælder for alle $a, b \in \mathcal{A}$, at

$$\rho_1(a) = \rho_1(b) \quad\Longleftrightarrow\quad \rho_2(a) = \rho_2(b).$$

Heraf følger, at vi kan veldefinere en unital injektiv $*$-homomorfi

$$\psi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2 \quad \text{ved} \quad \psi(\rho_1(a)) = \rho_2(a)\,,$$

som endda er oplagt surjektiv. Lad $\mathrm{id}_i : \mathcal{A}_i \to \mathbb{B}(H_i)$ være indlejringen og lad $\rho_i' : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_i$ være afbildningen $\rho_i$, opfattet som afbildning på sit billede. Definer så de unitale $*$-homomorfier

$$\varphi_1 = \mathrm{id}_2\psi : \mathcal{A}_1 \to \mathbb{B}(H_2) \quad,\quad \varphi_2 = \mathrm{id}_1\psi^{-1} : \mathcal{A}_2 \to \mathbb{B}(H_1)\,.$$

Selvfølgelig er $\varphi_i(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{K}(H_i)) = \varphi_i(0) = 0$, og Voiculescus sæting giver derfor $\mathrm{id}_i \sim_{\mathcal{K}} \mathrm{id}_i \oplus \varphi_i$. Idet vi bemærker identiteterne $\varphi_1\rho_1' = \rho_2$ og $\varphi_2\rho_2' = \rho_1$, tillader lemma 3.3 os at slutte

$$\rho_i \;=\; \mathrm{id}_i\rho_i' \;\sim_{\mathcal{K}}\; (\mathrm{id}_i \oplus \varphi_i)\rho_i' \;=\; \mathrm{id}_i\rho_i' \oplus \varphi_i\rho_i' \;=\; \rho_i \oplus \varphi_i\rho_i'\,,$$

altså $\rho_1 \sim_{\mathcal{K}} \rho_1 \oplus \rho_2$ samt $\rho_2 \sim_{\mathcal{K}} \rho_2 \oplus \rho_1$. Endelig giver lemma 3.2 og 3.3 det ønskede. □

Vi er nu rede til den første anvendelse af ovenstående.

**Sætning 3.6** *Lad $X$ være et kompakt metrisk rum. Der findes da trivielle extensioner af $\mathcal{K}$ med $C(X)$, og de er alle ækvivalente. Endvidere vil ækvivalensklassen af trivielle extensioner udgøre et neutralt element i $\mathrm{Ext}(X)$. Dermed er $\mathrm{Ext}(X)$ en abelsk semigruppe.*

**Bevis.** Først beviser vi eksistensen af trivielle extensioner. Da $X$ er kompakt og metrisk, er $X$ separabelt. Vi kan derfor finde en tæt følge $(x_n)$ med egenskaben, at for hvert isoleret punkt $y \in X$ er mængden $\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n = y\}$ uendelig. Vi kan da for $f \in C(X)$ definere $M_f \in \mathbb{B}(H)$ ved $M_f e_n = f(x_n)e_n$. Hvis $f \neq 0$ kan følgen $(f(x_n))$ *ikke* gå mod nul, og derfor er $M_f \notin \mathcal{K}$. Vi har derfor, at afblidningen $f \mapsto \pi M_f$ er en unital $*$-monomorfi, der splitter. Dette viser eksistensen.

Lad $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{M}on(X)$, og lad $\sigma_1, \sigma_2 : C(X) \to \mathbb{B}(H)$ være $*$-homomorfier med $\pi\sigma_i = \tau_i$. Det ses let, at $\sigma_i$ er injektiv, og så har vi

$$\mathrm{Ker}(\sigma_1) \;=\; \mathrm{Ker}(\pi\sigma_1) \;=\; \mathrm{Ker}(\sigma_2) \;=\; \mathrm{Ker}(\pi\sigma_2) \;=\; 0.$$

Af korollar 3.5 følger derfor, at der findes $U \in \mathcal{U}(H)$ med $\mathrm{Im}(\sigma_2 - \mathrm{Ad}\, U\, \sigma_1) \subseteq \mathcal{K}$, hvoraf $\tau_2 = \mathrm{Ad}\, \pi(U)\, \tau_1$. Altså er $\tau_1 \sim \tau_2$. Dette viser at alle trivielle elementer i $\mathcal{M}on(X)$ er ækvivalente.

Lad nu $\tau \in \mathcal{M}on(X)$, og sæt $\mathcal{A} = \pi^{-1}\tau(C(X))$, der er en $C^*$-delalgebra af $\mathbb{B}(H)$ indeholdende $I$. Antag så, at $\tau_1 = \pi\sigma$ splitter og at $\sigma(1) = I$. Vi skal vise $[\tau] + [\tau_1] = [\tau]$, altså $\tau \oplus \tau_1 \sim \tau$. Vi kan veldefinere en unital $*$-homomorfi

$$\rho := \sigma\tau^{-1}\pi \;:\; \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)\,,$$

og det er klart, at $\rho(\mathcal{A} \cap \mathcal{K}) = \rho(\mathcal{K}) = 0$. Det følger derfor af Voiculescus sætning 3.4, at $\mathrm{id} \sim_{\mathcal{K}} \mathrm{id} \oplus \rho$, hvor $\mathrm{id} : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ er indlejringen. Specielt findes $U \in \mathcal{U}(H^2, H)$ opfyldende

$$U\,(\mathrm{id} \oplus \rho)(T)\,U^* - \mathrm{id}(T) \;\in\; \mathcal{K}(H)$$

for alle $T \in \mathcal{A}$. I beviset for sætning 1.16 så vi, at $\iota_1 S_1^* + \iota_2 S_2^* \in \mathbb{B}(H, H^2)$ er unitær, og derfor vil $V = U(\iota_1 S_1^* + \iota_2 S_2^*) \in \mathcal{U}(H)$. Vi påstår $\mathrm{Ad}\,\pi(U)\,(\tau \oplus \tau_1) = \tau$ (hvilket jo viser det ønskede). Lad nemlig $f \in C(X)$, og find $T \in \mathbb{B}(H)$ med $\tau(f) = \pi(T)$. Da er selvfølgelig $T \in \mathcal{A}$ og $\rho(T) = \sigma(f)$. Endelig er

$$\begin{aligned}
\pi(V)\,(\tau \oplus \tau_1)(f)\,\pi(V^*) &= \pi(V)\,(\pi(S_1)\tau(f)\pi(S_1^*) + \pi(S_2)\tau_1(f)\pi(S_2^*))\,\pi(V^*)\\
&= \pi(U\iota_1)\pi(T)\pi(p_1 U^*) + \pi(U\iota_2)\rho(T)\pi(p_2 U^*)\\
&= \pi(U(\iota_1 \mathrm{id}(T) p_1 + \iota_2 \rho(T) p_2) U^*)\\
&= \pi(U\,(\mathrm{id} \oplus \rho)(T)\,U^*)\\
&= \pi(\mathrm{id}(T))\\
&= \tau(f)\,,
\end{aligned}$$

som ønsket. □

Endelig er vi i stand til at vise

**Hovedsætning 3.7** *For kompakt metrisk rum $X$ er* $(\mathrm{Ext(X)}, +)$ *en gruppe.*

**Bevis.** Vi mangler kun at vise eksistensen af inverse elementer. Lad derfor $\tau \in \mathcal{M}on(X)$ være givet. Da $\tau : C(X) \to Q(H)$ er en $*$-homomorfi vil $\tau$ automatisk være positiv. Sætning 2.20 giver nu eksistensen af en positiv unital afbildning $\tilde{\tau} : C(X) \to \mathbb{B}(H)$ med $\tau = \pi\tilde{\tau}$. $\tilde{\tau}$ er injektiv, idet $\tau$ er det. Af korollar 2.9 og sætning 2.5 følger nu, at der findes en unital $*$-homomorfi $\rho : C(X) \to M_2(\mathbb{B}(H))$ således, at $\rho$ har formen

$$\rho(f) \;=\; \begin{pmatrix} \tilde{\tau}(f) & \rho_{12}(f) \\ \rho_{21}(f) & \rho_{22}(f) \end{pmatrix} \quad,\quad f \;\in\; C(X).$$

Bemærk, at vi ikke (umiddelbart) ved om $\tilde{\tau}, \rho_{12}, \rho_{21}$ eller $\rho_{22}$ er $*$-homomorfier, men selvfølgelig er $\rho$ injektiv, idet $\tilde{\tau}$ er det. Vi viser først, at $\rho_{12}(f)$ og $\rho_{21}(f)$ er kompakte for ethvert $f \in C(X)$. Hvis man i identiteten

$$\rho(|f|^2) \;=\; \rho(f)\rho(\bar{f})$$

sammenligner operatorerne i øverste venstre hjørne, og dernæst anvender $\pi$, fås

$$\begin{aligned}
\tau(|f|^2) \quad &= \quad \tau(f)\tau(\bar{f}) + \pi(\rho_{12}(f)\rho_{21}(\bar{f}))\\
&= \quad \tau(|f|^2) + \pi(\rho_{12}(f)\rho_{12}(f)^*).
\end{aligned}$$

Altså er

$$0 \;=\; \|\pi(\rho_{12}(f)\rho_{12}(f)^*)\| \;=\; \|\pi\rho_{12}(f)\|^2,$$

og derfor $\rho_{12}(f) \in \mathcal{K}$. Da $\rho_{21}(f) = \rho_{12}(\bar{f})^*$, vil også $\rho_{21}(f) \in \mathcal{K}$. Heraf følger, at

$$\tilde{\sigma} = \pi\rho_{22} \;:\; C(X) \to Q(H)$$

faktisk er en unital $*$-homomorfi, idet jo

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(fg) &= \pi\rho_{22}(fg)\\ &= \pi(\rho_{22}(f)\rho_{22}(g) + \rho_{21}(f)\rho_{12}(g))\\ &= \tilde{\sigma}(f)\tilde{\sigma}(g).\end{aligned}$$

Det er klart, at $\Lambda^{-1}\rho : C(X) \to \mathbb{B}(H)$ er en unital $*$-monomorfi, og vi har

$$\begin{aligned}\pi\Lambda^{-1}\rho &= \Gamma^{-1}\tilde{\pi}\rho\\ &= \Gamma^{-1}\,\mathrm{diag}(\tau, \tilde{\sigma})\\ &= \tau \oplus \tilde{\sigma}.\end{aligned}$$

Altså splitter $\tau \oplus \tilde{\sigma} \in \mathcal{M}on(X)$. Den sidste lille finesse er, at $\tilde{\sigma}$ ikke nødvendigvis er injektiv. Derfor tager vi et trivielt element $\gamma \in \mathcal{M}on(X)$, og sætter $\sigma = \tilde{\sigma} \oplus \gamma$. Vi finder da

$$\begin{aligned}[\tau] + [\sigma] &= [\tau \oplus (\tilde{\sigma} \oplus \gamma)]\\ &= [(\tau \oplus \tilde{\sigma}) \oplus \gamma]\\ &= [\tau \oplus \tilde{\sigma}]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Dette viser, at $[\tau]$ har et inverst element i $\mathrm{Ext}(X)$, og dermed er sætningen bevist. □

**Bemærkning 3.8** Vi skal senere vise, at hvis $X$ og $Y$ er homeomorfe kompakte metriske rum, da vil $\mathrm{Ext}(X)$ og $\mathrm{Ext}(Y)$ være isomorfe abelske grupper.

### 3.1 Indeksafbildningen.

Vi vil her udvikle et redskab, der kan hjælpe til at udregne $\mathrm{Ext}(X)$ i konkrete tilfælde.

**Definition 3.9** Når $T \in \mathbb{B}(H)$ er Fredholm og $\pi : \mathbb{B}(H) \to Q(H)$ betegner kvotientafbildningen (vel)defineres

$$\mathrm{ind}(\pi(T)) = \mathrm{index}(T).$$

At dette er en tilladelig definition kan ses på følgende måde. Hvis $\pi(T_1) = \pi(T_2)$ findes $K \in \mathcal{K}$ med $T_1 = T_2 + K$ og derfor er

$$\mathrm{index}(T_1) = \mathrm{index}(T_2 + K) = \mathrm{index}(T_2).$$

Hermed er altså opnået en afbildning $\mathrm{ind} : Q(H)^{-1} \to \mathbb{Z}$.

**Sætning 3.10** *Afbildningen* $\mathrm{ind} : Q(H)^{-1} \to \mathbb{Z}$ *er lokalt konstant og homotopiinvariant.*

**Bevis.** Mængden $\Phi$ af Fredholm operatorer er åben i $\mathbb{B}(H)$ og index : $\Phi \to \mathbb{Z}$ er lokalt konstant. Til $V \in \Phi$ kan vi vælge $\delta > 0$, således at der for alle $U \in \Phi$ med $\|U - V\| < \delta$ gælder, at $\mathrm{index}(U) = \mathrm{index}(V)$. Hvis nu $\|\pi(U) - \pi(V)\| < \delta$, findes $K \in \mathcal{K}(H)$ med $\|U - (V + K)\| < \delta$. Vi finder da

$$\mathrm{ind}(\pi(U)) \;=\; \mathrm{index}(U) \;=\; \mathrm{index}(V + K) \;=\; \mathrm{ind}(\pi(V)).$$

Dette viser første påstand. Hvis $\pi(U) \sim_h \pi(V)$ i $Q(H)^{-1}$ er billedet af homotopien en sammenhængende delmængde af $\mathbb{Z}$. Det følger, at

$$\mathrm{ind}(\pi(U)) = \mathrm{ind}(\pi(V)).$$

□

**Definition 3.11** Hvis $X$ er et kompakt metrisk rum, da betegnes med $C(X)^{-1}$ de invertible elementer i $C(X)$. Vi minder om, at $f, g \in C(X)^{-1}$ kaldes homotope, såfremt der findes en kontinuert afbildning $\psi : [0, 1] \to C(X)^{-1}$ med $\psi(0) = f$ og $\psi(1) = g$. I dette tilfælde skrives $f \sim_h g$, og $\sim_h$ er en ækvivalensrelation i $C(X)^{-1}$. Med $C(X)_0^{-1}$ betegner vi de elementer $f \in C(X)^{-1}$, der er homotope med enheden indenfor $C(X)^{-1}$. Da vil $C(X)_0^{-1}$ udgøre en multiplikativ undergruppe i $C(X)^{-1}$, og med $\pi^1(X)$ betegnes kvotienten

$$\pi^1(X) = C(X)^{-1}/C(X)_0^{-1},$$

som vi kalder den første kohomotopigruppe for $X$.

Vi kan nu definere en afbildning $\gamma : \mathrm{Ext}(X) \to \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ ved

$$\gamma([\tau])([f]) = \mathrm{ind}(\tau(f)).$$

Her må vi igen tjekke veldefinerethed. Først uafhængighed af repræsentant for $[f]$ : Bemærk først, at for $f \in C(X)^{-1}$ er $\tau(f) \in Q(H)^{-1}$, således at $\mathrm{ind}(\tau(f))$ er defineret. Hvis $f_1, f_2 \in [f]$ er $f_1 f_2^{-1} \sim_h 1$ og derfor $f_1 \sim_h f_2$ i $C(X)^{-1}$. Dermed er også $\tau(f_1) \sim_h \tau(f_2)$ i $Q(H)^{-1}$, og af sætningen ovenfor fås da, at $\mathrm{ind}(\tau(f_1)) = \mathrm{ind}(\tau(f_2))$.

Dernæst uafhængighed af repræsentant for $[\tau]$ : Hvis $\tau_1 \sim \tau_2$ findes $U \in \mathcal{U}(H)$, så $\tau_1 = \mathrm{Ad}\,\pi(U)\tau_2$. For $f \in C(X)^{-1}$ har vi da med $\pi(T_2) = \tau_2(f)$, at

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}(\tau_1(f)) &= \mathrm{ind}(\mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau_2(f)) \\
&= \mathrm{index}(U T_2 U^*) \\
&= \mathrm{index}(T_2) \;=\; \mathrm{ind}(\tau_2(f)).
\end{aligned}$$

Endelig skal vi tjekke, at afbildningen

$$\gamma([\tau]) : \pi^1(X) \to \mathbb{Z}$$

rent faktisk tilhører $\mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$. Dette følger dog let af indexafbildningens homomorfiegenskab.

**Sætning 3.12** *Afbildningen* $\gamma : \mathrm{Ext}(X) \to \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ *er en homomorfi.*

**Bevis.** Lad $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{M}on(X)$ og lad $f \in C(X)^{-1}$. Vælg Fredholmoperatorer $U$ og $V$, så

$$\tilde{\pi}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1(f) & 0 \\ 0 & \tau_2(f) \end{pmatrix}.$$

Nu har vi

$$\begin{aligned}
\gamma([\tau_1]+[\tau_2])([f]) &= \gamma([\tau_1 \oplus \tau_2])(f) \\
&= \mathrm{ind}(\Gamma^{-1}\begin{pmatrix} \tau_1(f) & 0 \\ 0 & \tau_2(f) \end{pmatrix}) \\
&= \mathrm{ind}(\Gamma^{-1}\tilde{\pi}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}) \\
&= \mathrm{ind}(\pi\Lambda^{-1}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}) \\
&= \mathrm{index}(\Lambda^{-1}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}).
\end{aligned}$$

Ifølge sætning 1.16 kan vi finde $W \in \mathcal{U}(H \oplus H, H)$ med

$$\Lambda^{-1}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = W(U \oplus V)W^*.$$

Heraf fås

$$\dim\ker\Lambda^{-1}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = \dim\ker(U \oplus V) = \dim\ker(U) + \dim\ker(V).$$

Et tilsvarende resultat fås for $U^*$ og $V^*$, og så har vi

$$\begin{aligned}
\mathrm{index}(\Lambda^{-1}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}) &= \mathrm{index}(U) + \mathrm{index}(V) \\
&= \mathrm{ind}(\tau_1(f)) + \mathrm{ind}(\tau_2(f)) \\
&= \gamma([\tau_1])([f]) + \gamma([\tau_2])([f]).
\end{aligned}$$

Dette viser påstanden. □

## 3.2 Eksemplet: Ext($\mathbb{T}$).

**Lemma 3.13** *Lad $S$ være det ensidede skift i $\mathbb{B}(H)$. Da gælder*

(1) *$\pi(S)$ er unitær i $Q(H)$.*
(2) *Der findes ingen invertibel $V \in \mathbb{B}(H)$ med $\pi(V) = \pi(S)$.*
(3) $\mathrm{sp}_{ess}(S) = \mathbb{T}$.

**Bevis.** (1) Da $S^*S = I$ er $\pi(S)^*\pi(S) = 1_{Q(H)}$. Idet $P$ betegner projektionen på det 1-dimensionale underrum $\mathbb{C}e_1$, er $SS^* = I - P$, og da $P \in \mathcal{K}$ vil altså også $\pi(S)\pi(S)^* = 1_{Q(H)}$. Dette viser at $\pi(S)$ er unitær.
(2) Hvis $\pi(V) = \pi(S)$ vil $V - S \in \mathcal{K}$, og derfor har $U$ og $V$ samme Fredholmindex. Dette er dog umuligt, idet index$(V) = 0$, idet $V$ invertibel, medens selvfølgelig index$(S) = -1$.

(3) Pga. (1) er $\mathrm{sp}_{ess}(S) \subseteq \mathbb{T}$. Hvis ikke der gælder $=$, findes selvadjungeret $v \in Q(H)$ så $\pi(U) = e^{iv}$. Find dernæst $V \in \mathbb{B}(H)$ med $v = \pi(V)$. Nu er $e^{iV}$ invertibel i $\mathbb{B}(H)$ med

$$\pi(e^{iV}) \;=\; e^{\pi(iV)} \;=\; e^{iv} \;=\; \pi(U) \;,$$

hvilket strider mod (2). □

**Bemærkning 3.14** Vi betragter torus $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$ samt inklusionsafbildningen $z : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Vi har da punktevalueringshomomorfien

$$p : \mathrm{Hom}(\pi^1(\mathbb{T}), \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \quad , \quad \psi \;\mapsto\; \psi([z]) \;,$$

og afbildningen $\gamma' : \mathrm{Ext}(\mathbb{T}) \to \mathbb{Z}$ givet ved

$$\gamma'([\tau]) \;=\; p\gamma([\tau]) \;=\; \gamma([\tau])([z]) \;=\; \mathrm{ind}\,\tau(z) \;,$$

er derfor en gruppehomomorfi. Et vigtigt resultat er

**Sætning 3.15** *$\gamma' : \mathrm{Ext}(\mathbb{T}) \to \mathbb{Z}$ er en gruppeisomorfi. Mere konkret gælder der, at hvis $S$ betegner det ensidede skift i $\mathbb{B}(H)$, er $S$ en essentielt normal operator og $(\mathcal{E}_S, \varphi_S)$ er element i $\mathcal{E}xt(\mathbb{T})$. Endvidere er $\gamma'[(\mathcal{E}_S, \varphi_S)] = -1$, og derfor vil $[(\mathcal{E}_S, \varphi_S)]$ være en frembringer for $\mathrm{Ext}(\mathbb{T})$.*

**Bevis.** Ifølge lemma 3.13 er $S$ essentielt normal med $\mathrm{sp}_{ess}(S) = \mathbb{T}$. Derfor er $(\mathcal{E}_S, \varphi_S)$ element i $\mathcal{E}xt(\mathbb{T})$. Idet $\tau_S$ er den til $(\mathcal{E}_S, \varphi_S)$ svarende $*$-monomorfi, er $\tau_S(z) = \pi(S)$ (idet jo $\varphi_S(S) = z$), og dermed

$$\gamma'([\tau_S]) \;=\; \mathrm{ind}\,\tau_S(z) \;=\; \mathrm{ind}\,\pi(S) \;=\; \mathrm{index}\,S \;=\; -1 \;.$$

Dette viser påstanden om $(\mathcal{E}_S, \varphi_S)$ samt surjektiviteten af $\gamma'$.

Tilbage er kun injektiviteten af $\gamma'$. Antag derfor at $[\tau] \in \mathrm{Ext}(\mathbb{T})$ med $\gamma'([\tau]) = 0$. Vi skal vise at $\tau$ splitter. Vælg $W \in \mathbb{B}(H)$ med $\pi(W) = \tau(z)$, og bemærk, at

$$\pi(W)\pi(W)^* \;=\; \tau(z)\tau(z)^* \;=\; \tau(z\bar{z}) \;=\; \tau(1) \;=\; I \;.$$

Tilsvarende er selvfølgelig $\pi(W)^*\pi(W) = I$, og derfor er $W$ Fredholm med $\mathrm{index}\,W = 0$ ifølge antagelse. Lad nu $U$ være den partielle isometri i polardekompositionen for $W$, altså $W = U|W|$. Vi ser, at $\pi(U) = \pi(W)$, idet

$$\pi(|W|) \;=\; \pi((W^*W)^{1/2}) \;=\; \pi(W^*W)^{1/2} \;=\; I \;,$$

og dermed $\pi(W) = \pi(U)\pi(|W|) = \pi(U)$. Derfor er også $U$ Fredholm med $\mathrm{index}\,U = 0$. Vi kan derfor vælge $K \in \mathbb{B}_f(H) \subseteq \mathcal{K}$ som afbilder $\mathrm{Ker}(U)$ isometrisk på $\mathrm{Ker}(U^*)$, og som er 0 på $\mathrm{Ker}(U)^\perp$. Da $U$ er partiel isometri, vil $U$ afbilde $\mathrm{Ker}(U)^\perp$ isometrisk på $\mathrm{Ker}(U^*)^\perp$ (og være 0 på $\mathrm{Ker}(U)$). Ved at dekomponere $H$

$$H \;=\; \mathrm{Ker}(U) \oplus \mathrm{Ker}(U)^\perp \;=\; \mathrm{Ker}(U^*) \oplus \mathrm{Ker}(U^*)^\perp \;,$$

kan vi altså definere den surjektive og isometriske $U' = K \oplus U \in \mathbb{B}(H)$ opfyldende $U - U' = K \in \mathcal{K}$. Da $U'$ åbenbart er unitær, vil specielt $U'$ være normal med $\mathrm{sp}(U') \subseteq \mathbb{T}$, og funktionskalkylen i $U'$ giver derfor en $*$-homomorfi

$$\rho : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{B}(H) \quad , \quad f \;\mapsto\; f(U') \;.$$

Endelig er $\pi\rho = \tau$, idet jo

$$\pi\rho(z) \;=\; \pi(z(U')) \;=\; \pi(U') \;=\; \pi(U) \;=\; \pi(W) \;=\; \tau(z) \;,$$

og $z$ frembringer $C(\mathbb{T})$ som $C^*$-algebra. □

### 3.3 Spektre for diagonaloperatorer.

Lad $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en ortonormalbasis for $H$. Når $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en begrænset følge i $\mathbb{C}$, lader vi $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ betegne diagonaloperatoren i $\mathbb{B}(H)$, hvis egenværdier er $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ mht. basen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Lemma 3.16** *For* $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in \mathbb{B}(H)$ *er* $\text{sp}(D) = \overline{\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}}$.

**Bevis.** Idet $(D - \lambda_n I)e_n = 0$, er $D - \lambda_n I$ ikke invertibel, altså $\lambda_n \in \text{sp}(D)$. Hvis omvendt $\lambda \notin \overline{\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}}$, da findes $\varepsilon > 0$ så $|\lambda_n - \lambda| > \varepsilon$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Derfor er $(\frac{1}{\lambda_n - \lambda})_{n\in\mathbb{N}}$ en begrænset følge i $\mathbb{C}$, hvorfor $S = \text{diag}(\frac{1}{\lambda_1-\lambda}, \frac{1}{\lambda_1-\lambda}, \ldots)$ definerer en operator i $\mathbb{B}(H)$. Det fremgår nu, at $S$ er den inverse til $D - \lambda I = \text{diag}(\lambda_1 - \lambda, \lambda_2 - \lambda, \ldots)$, hvormed $\lambda \notin \text{sp}(D)$. $\square$

**Sætning 3.17** *For* $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in \mathbb{B}(H)$ *er*

$$\text{sp}_{ess}(D) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots\}}\,.$$

*Specielt gælder* $\text{dist}(\lambda_n, \text{sp}_{ess}(D)) \to 0$ *for* $n \to \infty$.

**Bevis.** Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Sætter vi $\mu_1 = \ldots = \mu_{n-1} = \lambda_n$, vil

$$D' = \text{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots)$$

tilhøre $\mathbb{B}(H)$ med $D - D' \in \mathbb{B}_f(H) \subseteq \mathcal{K}$. Derfor vil

$$\text{sp}_{ess}(D) \;=\; \text{sp}_{ess}(D') \;\subseteq\; \text{sp}(D') \;=\; \overline{\{\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots\}}\,.$$

Dette viser inklusionen $\subseteq$ .
Antag omvendt, at $\lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots\}}$. Til hvert $\varepsilon > 0$ kan vi derfor finde $n_1 < n_2 < \ldots$ i $\mathbb{N}$ så $|\lambda - \lambda_{n_j}| < \varepsilon$ for alle $j \in \mathbb{N}$. Specielt vil

$$\|(D - \lambda I)e_{n_j}\| \;=\; \|(\lambda_{n_j} - \lambda)e_{n_j}\| \;=\; |\lambda_{n_j} - \lambda| \;<\; \varepsilon\,.$$

Vi antager så, at $\lambda \notin \text{sp}_{ess}(D)$, og udleder en modstrid. Da nu $D - \lambda I$ er Fredholm, findes $S \in \mathbb{B}(H)$ så $S(D - \lambda I)$ er projektionen på $(\text{Ker}(D - \lambda I))^\perp$. Idet $P$ betegner projektionen på det endeligdimensionale underrum $\text{Ker}(D - \lambda I)$, er altså $S(D - \lambda I) = I - P$. Vælg herefter $\varepsilon > 0$ så $\varepsilon\|S\| < 1$. Som bemærket ovenfor, findes $n_1 < n_2 < \ldots$ i $\mathbb{N}$ opfyldende $\|(D - \lambda I)e_{n_j}\| < \varepsilon$ for alle $j \in \mathbb{N}$. Bemærk, at $Pe_{n_j} \to 0$ for $j \to \infty$, fordi :

Vælg ortonormalbasis $f_1, \ldots, f_m$ for $P(H)$. Da er $Pe_{n_j} = \sum_{i=1}^m (Pe_{n_j}, f_i) f_i$, og det er derfor nok at vise $\lim_{j\to\infty}(Pe_{n_j}, f_i) = 0$ for ethvert $i = 1, \ldots, m$. Men det er klart, idet

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(Pe_{n_j}, f_i)|^2 \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} |(e_{n_j}, Pf_i)|^2 \;\le\; \sum_{s=1}^{\infty} |(e_s, Pf_i)|^2 \;<\; \infty\,.$$

Da nu

$$\begin{aligned} 1 - \|Pe_{n_j}\| \;&=\; \|e_{n_j}\| - \|Pe_{n_j}\| && \le\; \|e_{n_j} - Pe_{n_j}\| \\ &=\; \|(I - P)e_{n_j}\| && =\; \|S(D - \lambda I)e_{n_j}\| \\ &\le\; \|S\|\,\|(D - \lambda I)e_{n_j}\| && \le\; \|S\|\varepsilon\,, \end{aligned}$$

vil $1 \leq \|S\|\varepsilon$, i modstrid med valget af varepsilon. Tilbage står at vise sætningens sidste påstand, hvilket gøres således :

Med $K_n = \overline{\{\lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots\}}$ er $K_n$ kompakt, $\lambda_n \in K_n$ og $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ samt $\mathrm{sp}_{ess}(D) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Det er nok at vise, at enhver delfølge $(\lambda_{n_p})$ af $(\lambda_n)$ *har* en delfølge $(\lambda_{n_{p_q}})$ med

$$\mathrm{dist}(\lambda_{n_{p_q}}, \mathrm{sp}_{ess}(D)) \to 0 \quad \text{for} \quad q \to \infty .$$

Følgen $(\lambda_{n_p})$ tilhører $K_1$, og der findes således $\lambda \in K_1$ og en delfølge $\lambda_{n_{p_q}}$ af $(\lambda_{n_p})$, med $\lambda_{n_{p_q}} \to \lambda$. Endda vil $\lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, idet jo hvert $K_n$ er afsluttet, og $(\lambda_{n_{p_q}})$ tilhører $K_n$ fra et vist trin. Da $z \mapsto \mathrm{dist}(z, \mathrm{sp}_{ess}(D))$ er kontinuert, vil

$$\mathrm{dist}(\lambda_{n_{p_q}}, \mathrm{sp}_{ess}(D)) \to \mathrm{dist}(\lambda, \mathrm{sp}_{ess}(D)) = 0 \quad \text{for} \quad q \to \infty ,$$

som ønsket. □

**Sætning 3.18** *For selvadjungeret $T \in \mathbb{B}(H)$ findes selvadjungeret $K \in \mathcal{K}$ så $\mathrm{sp}(T+K) = \mathrm{sp}_{ess}(T)$.*

**Bevis.** Weyl-von Neumanns sætning giver selvadjungerede $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \mathbb{B}(H)$ og $K_1 \in \mathcal{K}$ med $T = D + K_1$. Hvis vi kan finde selvadjungeret $K_2 \in \mathcal{K}$ så $\mathrm{sp}(D+K_2) \subseteq \mathrm{sp}_{ess}(D)$, da vil $K = K_2 - K_1 \in \mathcal{K}$ være selvadjungeret med

$$\mathrm{sp}(T+K) \;=\; \mathrm{sp}(D+K_2) \;\subseteq\; \mathrm{sp}_{ess}(D) \;=\; \mathrm{sp}_{ess}(T) ,$$

(og den anden inklusion $\mathrm{sp}_{ess}(T) = \mathrm{sp}_{ess}(T+K) \subseteq \mathrm{sp}(T+K)$ er generel). Da $\mathrm{dist}(\lambda_n, \mathrm{sp}_{ess}(D)) \to 0$ for $n \to \infty$, kan vi vælge $\mu_n \in \mathrm{sp}_{ess}(D) \subseteq \mathbb{R}$ så $|\lambda_n - \mu_n| \to 0$ for $n \to \infty$. Med $A = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots)$ er derfor $A \in \mathbb{B}(H)$ og

$$K_2 \;=\; A - D \;=\; \mathrm{diag}(\mu_1 - \lambda_1, \mu_2 - \lambda_2, \dots) \;\in\; \mathcal{K} ,$$

og både $A$ og $K$ er selvadjungerede. Endelig er

$$\mathrm{sp}(D+K_2) \;=\; \mathrm{sp}(A) = \overline{\{\mu_1, \mu_2, \dots\}} \;\subseteq\; \mathrm{sp}_{ess}(D) .$$

Dette viser sætningen. □

## 3.4 Ext for delmængder af $\mathbb{R}$.

Formålet med dette afsnit er at finde tilstrækkelige topologiske betingelser på rummet $X$, som giver $\mathrm{Ext}(X) = 0$.

**Sætning 3.19** *Antag $X$ er kompakt metrisk og at der findes reel $a \in C(X)$ så $C^*(a,1) = C(X)$. Da er* $\mathrm{Ext}(X) = 0$. *Denne situation forekommer når $X \subseteq \mathbb{R}$.*

**Bevis.** Sæt $Y = \mathrm{sp}_{C(X)}(a)$, og betragt den kontinuerte funktionskalkyle

$$\mu \,:\, C(Y) \;\to\; C^*(a,1) = C(X) \quad , \quad f \;\mapsto\; f(a) .$$

Givet $\tau \in \mathcal{M}on(X)$, skal vi vise at $\tau$ splitter. Da $a$ er reel, er $\tau(a) \in Q(H)$ selvadjungeret. Følgelig findes selvadjungeret $T_1 \in \mathbb{B}(H)$ med $\pi(T_1) = \tau(a)$. Find så selvadjungeret $K \in \mathcal{K}$ med

$$\mathrm{sp}(T_1 + K) = \mathrm{sp}_{ess}(\pi(T_1)) = \mathrm{sp}(\tau(a)) = \mathrm{sp}_{\mathrm{Im}(\tau)}(\tau(a)) = \mathrm{sp}_{C(X)}(a) = Y .$$

Altså er $T = T_1 + K \in \mathbb{B}(H)$ selvadjungeret og opfylder $\pi(T) = \tau(a)$ samt $\mathrm{sp}(T) = Y$. Vi kan så betragte den kontinuerte funktionskalkyle i $T$

$$\nu : C(Y) \to C^*(T, I) \subseteq \mathbb{B}(H) \quad , \quad f \mapsto f(T)\,.$$

Nu er $\rho = \nu\mu^{-1} : C(X) \to \mathbb{B}(H)$ en $*$-homomorfi med $\pi\rho = \tau$ fordi

$$\begin{array}{lllllllll} (\pi\rho)(1) & = & (\pi\nu\mu^{-1})(1) & = & (\pi\nu)(1) & = & \pi(I) & = & \tau(1) \\ (\pi\rho)(a) & = & (\pi\nu\mu^{-1})(a) & = & (\pi\nu)(\mathrm{id}_Y) & = & \pi(T) & = & \tau(a)\,. \end{array}$$

Hvis $X \subseteq \mathbb{R}$ opfylder inklusionsafbildningen $a : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ det ønskede, pga. Stone-Weierstrass. □

**Bemærkning 3.20** Fra topologien (se f.eks. [5, side 100]) er det velkendt, at Cantormængden $C$ er entydigt bestemt, optil homeomorfi, ved at være kompakt, metriserbar, totalt usammenhængende og perfekt.

**Sætning 3.21** *Hvis $X$ er kompakt, metrisk og totalt usammenhængende, da er $X$ homeomorf med en delmængde af Cantormængden.*

**Bevis.** Det ses let, at $X \times C$ er kompakt, metriserbar, totalt usammenhængende og perfekt. Derfor findes en homeomorfi $h : X \times C \to C$. Idet $i : X \to X \times C$ er en indlejring, er $h \circ i : X \to C$ den ønskede homeomorfi på sit billede. □

**Korollar 3.22** *Hvis $X$ er kompakt, metrisk og totalt usammenhængende, da er* $\mathrm{Ext}(X) = 0$.

**Bevis.** Sammenhold bemærkning 3.8 og de to forrige sætninger. □

# 4 Ext som funktor.

## 4.1 Kategorierne $\mathbb{KM}$ og $\mathbb{AG}$.

Vi definerer

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{KM}$ | : | Kategorien af kompakte metriske rum og kontinuerte afbildninger. |
| $\mathbb{AG}$ | : | Kategorien af abelske grupper og gruppehomomorfier. |

To følger $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ og $A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C'$ i $\mathbb{KM}$ (resp. $\mathbb{AG}$) kaldes *isomorfe*, såfremt der findes homeomorfier (resp. gruppeisomorfier) $\alpha$, $\beta$ og $\gamma$ der giver kommutativitet af diagrammet

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \end{tikzcd}$$

Følgen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ kaldes *kortexakt* såfremt den er isomorf med en følge af formen

$$K \xrightarrow{\iota} L \xrightarrow{\pi} L/K\ , \tag{9}$$

hvor $K$ er en afsluttet delmængde (resp. undergruppe) af $L$, $L/K$ det topologiske kvotientrum (resp. kvotientgruppen), $\iota$ inklusionsafbildningen og $\pi$ kvotientafbildningen. Det er et spørgsmål om diagramjagt at indse

$(i)$ I kategorien $\mathbb{AG}$ er $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ kortexakt netop hvis $f$ injektiv, $g$ surjektiv, og $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

$(ii)$ I kategorien $\mathbb{KM}$ er $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ kortexakt netop hvis $f$ injektiv, $g$ surjektiv, $g \circ f$ konstant, og der for alle $b_1, b_2 \in B$ gælder, at $\kappa(b_1) = \kappa(b_2)$, når blot $g(b_1) = g(b_2)$. Her betegner $\kappa : B \to B/\mathrm{Im}(f)$ kvotientafbildningen.

Man ser, at i bekræftende fald af $(ii)$ findes en (entydigt bestemt) homeomorfi $h : B/\mathrm{Im}(f) \to C$, som gør følgende diagram kommutativt

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & C \\ & B/\mathrm{Im}(f) \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Ved en *funktor* $T : \mathbb{KM} \to \mathbb{AG}$ forstås det sædvanlige. Vi kalder en kovariant funktor $T$ *exakt* resp. *halvexakt* såfremt

$$TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Tg} TC \ \text{ er kortexakt} \quad \text{resp.} \quad \mathrm{Im}(Tf) = \mathrm{Ker}(Tg),$$

for enhver kortexakt følge $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ i $\mathbb{KM}$. Man ser umiddelbart, at $T$ er exakt resp. halvexakt blot

$$TK \xrightarrow{T\iota} TL \xrightarrow{T\pi} T(K/L) \ \text{ er kortexakt} \quad \text{resp.} \quad \mathrm{Im}(T\iota) = \mathrm{Ker}(T\pi)$$

for enhver følge af formen (9) i $\mathbb{KM}$.

## 4.2 Funktoren Ext.

Lad $f : X \to Y$ være en kontinuert afbildning mellem kompakte metriske rum. For $\tau \in \mathcal{H}om(X)$ defineres $\tau_f \in \mathcal{H}om(Y)$ ved

$$\tau_f \ : g \ \mapsto \ \tau(g \circ f) \ , \quad g \in C(Y).$$

Selv om $\tau \in \mathcal{M}on(X)$ kan man desværre ikke være sikker på at $\tau_f$ tilhører $\mathcal{M}on(Y)$, og vi må derfor sno os lidt. For $\sigma \in \mathcal{M}on(Y)$ som splitter, defineres

$$f_{*\sigma} : \mathcal{M}on(X) \to \mathcal{M}on(Y) \quad , \quad \tau \ \mapsto \ \tau_f \oplus \sigma \, ,$$

og vi bemærker, at $\tau_f \oplus \sigma \in \mathcal{M}on(Y)$, idet $\sigma \in \mathcal{M}on(Y)$.

**Lemma 4.1** *Antag at $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{M}on(Y)$ splitter, og at $\tau, \tau', \tau'' \in \mathcal{H}om(X)$. Da gælder*

(1) *Hvis $\tau' \sim \tau''$, da er $\tau'_f \sim \tau''_f$.*
(2) $(\tau' \oplus \tau'')_f \ = \ \tau'_f \oplus \tau''_f$.
(3) *Hvis $\tau' \sim \tau''$ i $\mathcal{M}on(X)$, da vil $f_{*\sigma_1}(\tau') \sim f_{*\sigma_2}(\tau'')$.*
(4) *For $\tau', \tau'' \in \mathcal{M}on(X)$ er $f_{*\sigma_1}(\tau') \oplus f_{*\sigma_2}(\tau'') \sim f_{*\sigma}(\tau' \oplus \tau'')$.*
(5) *Hvis $\tau$ splitter, da vil $\tau_f$ splitte.*
(6) *Hvis $\tau \in \mathcal{M}on(X)$ og $f$ er surjektiv, da er $\tau_f \in \mathcal{M}on(Y)$ med $f_{*\sigma}(\tau) \sim \tau_f$.*
(7) *Hvis $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ i $\mathbb{KM}$, så gælder $\tau_{g \circ f} \ = \ (\tau_f)_g$.*
*For triviel $\nu \in \mathcal{M}on(Z)$ og for vilkårlig $\tau \in \mathcal{M}on(X)$ er også $(g_{*\nu} \circ f_{*\sigma})(\tau) \sim (g \circ f)_{*\nu}(\tau)$.*

**Bevis.** (1) Da $\tau' \sim \tau''$ findes unitær $U \in \mathbb{B}(H)$ så $\tau'' = \operatorname{Ad} \pi(U) \, \tau'$, og dermed er også $\tau''_f = \operatorname{Ad} \pi(U) \, \tau'_f$, hvormed altså $\tau'_f \sim \tau''_f$ , som ønsket.
(2) Følger af, at der for $g \in C(Y)$ gælder

$$\begin{aligned} (\tau' \oplus \tau'')_f(g) &= (\tau' \oplus \tau'')(g \circ f) \\ &= (\Gamma^{-1} \operatorname{diag}(\tau', \tau''))(g \circ f) \\ &= (\Gamma^{-1} \operatorname{diag}(\tau'_f, \tau''_f))(g) \\ &= (\tau'_f \oplus \tau''_f)(g). \end{aligned}$$

(3) Ifølge (1) er $\tau'_f \sim \tau''_f$, men da $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{M}on(Y)$ splitter, er også $\sigma_1 \sim \sigma_2$. Dermed vil $\tau'_f \oplus \sigma_1 \sim \tau''_f \oplus \sigma_2$, hvilket netop er det ønskede.
(4) Ved at benytte allerede viste regler finder man

$$\begin{aligned} f_{*\sigma_1}(\tau') \oplus f_{*\sigma_2}(\tau') &= (\tau'_f \oplus \sigma_1) \oplus (\tau''_f \oplus \sigma_2) \\ &\sim (\tau'_f \oplus \tau''_f) \oplus (\sigma_1 \oplus \sigma_2) \\ &= (\tau' \oplus \tau'')_f \oplus (\sigma_1 \oplus \sigma_2) \\ &= f_{*(\sigma_1 \oplus \sigma_2)}(\tau' \oplus \tau'') \\ &\sim f_{*\sigma}(\tau' \oplus \tau'') \, . \end{aligned}$$

(5) Hvis $\tau \in \mathcal{H}om(X)$ splitter, så findes $*$-homomorfi $\rho : C(X) \to \mathbb{B}(H)$ så $\tau = \pi\rho$. Nu er

$$\rho_f : C(Y) \to \mathbb{B}(H) \quad , \quad g \ \mapsto \ \rho(g \circ f)$$

en $*$-homomorfi med $\tau_f = \pi\rho_f$ idet der for $g \in C(Y)$ gælder

$$(\pi\rho_f)(g) \ = \ \pi\rho(g \circ f) \ = \ \tau(g \circ f) \ = \ \tau_f(g).$$

Altså splitter $\tau_f$.
(6) Hvis $g \in C(Y)$ med $0 = \tau_f(g) = \tau(g \circ f)$ vil $g \circ f = 0$, idet $\tau$ er injektiv, og dermed $g = 0$, fordi $f$ er surjektiv. Dette viser injektiviteten af $\tau_f$. Endvidere er

$$f_{*\sigma}(\tau) \ = \ \tau_f \oplus \sigma \ \sim \ \tau_f.$$

(7) For $h \in C(Z)$ gælder udregningen

$$\begin{array}{rcccl} \tau_{g\circ f}(h) & = & \tau(h \circ (g \circ f)) & = & \tau((h \circ g) \circ f) \\ & = & \tau_f(h \circ g) & = & (\tau_f)_g(h). \end{array}$$

Endvidere har vi

$$\begin{array}{rcl} (g_{*\nu} \circ f_{*\sigma})(\tau) & = & g_{*\nu}(\tau_f \oplus \sigma) \\ & = & (\tau_f \oplus \sigma)_g \oplus \nu \\ & = & ((\tau_f)_g \oplus \sigma_g) \oplus \nu \\ & \sim & \tau_{g\circ f} \oplus (\sigma_g \oplus \nu) \\ & \sim & \tau_{g\circ f} \oplus \nu \\ & = & (g \circ f)_{*\nu}(\tau). \end{array}$$

Bemærk, at $(\sigma_2)_g \in \mathcal{H}om(Z)$ splitter, ifølge (5). Dette viser lemmaet. □

På grund af ovenstående lemma er efterfølgende definition meningsfuld.

**Definition 4.2** For kontinuert afbildning $f : X \to Y$ mellem kompakte metriske rum, defineres

$$\mathrm{Ext}(f) : \mathrm{Ext}(X) \to \mathrm{Ext}(Y) \ \text{ ved } \ \mathrm{Ext}(f)([\tau]) = [f_{*\sigma}(\tau)] \ ,$$

hvor $\sigma \in \mathcal{M}on(Y)$ splitter, og er valgt vilkårligt. For nemheds skyld skrives fremover $f_*$ i stedet for $\mathrm{Ext}(f)$.

**Sætning 4.3** $\mathrm{Ext} : \mathbb{KM} \to \mathbb{AG}$ *er en kovariant funktor.*

**Bevis.** Hvis $f : X \to Y$ er en morfi i $\mathbb{KM}$, da vil $f_*$ faktisk være en morfi i $\mathbb{AG}$. Foregående lemma giver nemlig

$$\begin{array}{rcl} f_*([\tau_1]) + f_*([\tau_2]) & = & [f_{*\sigma}(\tau_1)] + [f_{*\sigma}(\tau_2)] \\ & = & [f_{*\sigma}(\tau_1) \oplus f_{*\sigma}(\tau_2)] \\ & = & [f_{*\sigma}(\tau_1 \oplus \tau_2)] \\ & = & f_*([\tau_1 \oplus \tau_2]) \\ & = & f_*([\tau_1] + [\tau_2]). \end{array}$$

For morfier $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ i $\mathbb{KM}$, er $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ idet jo

$$\begin{array}{rcl} (g_* \circ f_*)([\tau]) & = & g_*([f_{*\sigma}(\tau)]) \\ & = & [g_{*\nu}(f_{*\sigma}(\tau))] \\ & = & [(g_{*\nu} \circ f_{*\sigma})(\tau)] \\ & = & [(g \circ f)_{*\nu}(\tau)] \\ & = & (g \circ f)_*([\tau]). \end{array}$$

Endelig bevares identiteten, idet jo $\mathrm{id}_X : X \to X$ er surjektiv, og derfor

$$(\mathrm{id}_X)_*([\tau]) \;=\; [(\mathrm{id}_X)_{*\sigma}(\tau)] \;=\; [\tau_{\mathrm{id}_X}] \;=\; [\tau] \;=\; \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(X)}([\tau]).$$

Dette viser påstanden. □

**Korollar 4.4** *Hvis $X$ og $Y$ er homeomorfe kompakte metriske rum, da er* $\mathrm{Ext}(X)$ *og* $\mathrm{Ext}(Y)$ *isomorfe grupper.*

**Sætning 4.5** *Hvis $f : X \to Y$ er en konstant afbildning mellem kompakte metriske rum, da er $f_* : \mathrm{Ext}(X) \to \mathrm{Ext}(Y)$ nulhomomorfien.*

**Bevis.** Antag $f$ er konstant lig $b \in Y$. Betragt så $\rho \in \mathcal{H}om(Y)$ defineret ved $\rho(g) = g(b)1_{Q(H)}$ for $g \in C(Y)$. For vilkårligt $\tau \in \mathcal{M}on(X)$ er da $\tau_f = \rho$, idet

$$\tau_f(g) = \tau(g \circ f) = \tau(g(b) \cdot 1) = g(b)\tau(1) = g(b)1_{Q(H)} = \rho(g)$$

for alle $g \in C(Y)$. Altså er

$$f_*([\tau]) \;=\; [\tau_f \oplus \sigma] \;=\; [\rho \oplus \sigma] \;,$$

hvilket viser, at $f_*$ er konstant. Da $f_*$ *er* en gruppehomomorfi, følger det ønskede. (I øvrigt er det helt trivielt, at $\rho$ splitter.) □

### 4.3 Halvexakthed af Ext.

I vort studium af funktoren Ext, får vi brug for endnu et resultat fra teorien om repræsentaioner af $C^*$algebraer, som vi også blot citeter. Først en

**Definition 4.6** Hvis $\sigma : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ er en $*$-homomorfi, da kalder vi $\sigma$ for en *diagonalrepræsentation*, såfremt der findes en basis $(e_n)$ for $H$, således at der for hvert $a \in \mathcal{A}$ gælder at $\sigma(a)$ er diagonal mht. denne basis. Man ser, at operatorerne, der er diagonale mht. denne basis udgør en unital $C^*$-delalgebra af $\mathbb{B}(H)$. Vi kalder denne for *diagonalalgebraen* mht. den givne basis. Når det fremgår af sammenhængen hvilken basis, der er tale om, vil vi betegne diagonalalgebraen med $\mathcal{D}$.

Man kan da vise følgende generalisering af Weyl-von Neumanns sætning til repræsentationer af $C(X)$ (vi henviser til [4, si 62])

**Sætning 4.7** *Hvis $\rho : C(X) \to \mathbb{B}(H)$ er en $*$-homomorfi, og $(e_n)$ er en basis for $H$, da findes en diagonalrepræsentation $\sigma$ mht. denne basis, således at $\rho \sim_{\mathcal{K}} \sigma$.*

Endvidere får vi brug for nogle lemmaer.

**Lemma 4.8** *Lad $(E_n)$ være en følge af projektioner i $\mathbb{B}(H)$, som konvergerer stærkt mod 0. For $K \in \mathcal{K}$ vil da $KE_n \to 0$ og $E_nK \to 0$ i norm.*

**Bevis.** Da $KE_n = E_nK^*$, er det nok at vise, at $E_nK \to 0$ i norm. Vi kan gøre $\|K - F\|$ vilkårligt lille ved at vælge $F \in \mathbb{B}_f(H)$ passende; og uligheden

$$\|E_nK\| \;\le\; \|E_n(K - F)\| + \|E_nF\| \;\le\; \|K - F\| + \|E_nF\|,$$

viser derfor, at det er nok at vise $\|E_nF\| \to 0$ for hvert $F \in \mathbb{B}_f(H)$. Vi kan selvfølgelig antage $F \neq 0$. Lad $\varepsilon > 0$ og vælg ortonormalbasis $y_1, \dots, y_m$ for $\mathrm{Im}(F)$. Vælg $N \in \mathbb{N}$, så $\|E_n y_i\| < \varepsilon(m\|F\|)^{-1}$ for $n \geq N$ og alle $i = 1, \dots, m$. For vilkårligt $x \in H$ med $\|x\| \leq 1$ er nu $\|E_nFx\| \leq \varepsilon$, thi: Skriv $Fx = \sum_1^m \alpha_i y_i$. Da er $\sum_1^m |\alpha_i|^2 = \|Fx\|^2 \leq \|F\|^2$, hvorfor $|\alpha_i| \leq \|F\|$ for alle $i$. Heraf

$$\|E_nFx\| \;=\; \|\sum_{i=1}^m \alpha_i E_n y_i\| \;\leq\; \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \|E_n y_i\| \;< \varepsilon,$$

for $n \geq N$. □

**Lemma 4.9** *Lad $\mathcal{D}$ være en diagonalalgebra, lad $E$ være en projektion i $\mathcal{D}$, lad $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}$ og lad $T_1 \dots, T_n \in \mathbb{B}(H)$ være vilkårlige. Hvis*

$$A_i := E(T_i - D_i)E \quad og \quad B_i := ET_i - T_iE \quad i = 1, \dots, n,$$

*alle er kompakte og $\varepsilon > 0$, da findes en projektion $E' \in \mathcal{D}$ opfyldende*

$$E' \leq E, \quad E - E' \in \mathbb{B}_f(H) \quad og$$

$$\|E'(T_i - D_i)E'\| < \varepsilon \quad og \quad \|E'T_i - T_iE'\| < \varepsilon.$$

*Endvidere er $E'T_i - T_iE'$ og $E'(T_i - D_i)E'$ kompakte.*

**Bevis.** Hvis $(e_i)$ er basen hørende til diagonalalgebraen, og $Ex = \sum_1^\infty \lambda_i(x, e_i)e_i$, da kan vi sætte $E_n = \sum_n^\infty \lambda_i(x, e_i)e_i$. Hvis vi skriver $x = \sum_1^\infty \alpha_i e_i$, finder vi for $x \in H$

$$\|E_n x\|^2 \;=\; \sum_{i=n}^\infty |\lambda_i \alpha_i|^2 \;\leq\; \sum_{i=n}^\infty |\alpha_i|^2 \;\to 0,$$

og dette viser, at $E_n$ konvergerer mod 0 i den stærke operator topologi. Som $E'$ kan vi bruge $E_n$, når $n$ er tilstrækkeligt stor, hvilket ses således: På grund af forrige lemma vil $E_n(T_i - D_i)E_n = E_nA_iE_n \to 0$ i norm. Vi finder også, idet $E$ og $E_n$ kommuteter med hvert $D_i$, at

$$\begin{aligned} E_nT_i - T_iE_n &= E_nT_i(I - E_n) - (I - E_n)T_iE_n \\ &= E_nET_i(I - E) + E_nET_iE(E - E_n) \\ &\quad -(I - E)T_iEE_n - (E - E_n)ET_iEE_n \\ &= E_nB_i(I - E) + E_nA_i(E - E_n) \\ &\quad +(I - E)B_iE_n - (E - E_n)A_iE_n, \end{aligned}$$

der går mod nul i norm ifølge forrige lemma. Den sidste påstand er klar. □

**Lemma 4.10** *Lad $Y$ være et kompakt Hausdorff rum og $\sigma : C(Y) \to \mathbb{B}(H)$ en unital diagonalrepræsentation. Da findes en følge $(y_n)$ i $Y$ så $\sigma(f) = \mathrm{diag}(f(y_n))$ for alle $f \in C(Y)$.*

**Bevis.** Find funktioner $\sigma_n : C(Y) \to \mathbb{C}$ så $\sigma(f) = \mathrm{diag}(\sigma_n(f))$. Da $\sigma$ er en unital $*$-homomorfi ses let, at alle $\sigma_n$ bliver ligeså. Altså er $\sigma_n$ en karakter på $C(Y)$, og derfor findes $y_n \in Y$ så $\sigma_n(f) = f(y_n)$ for alle $f \in C(Y)$. Dette viser påstanden □

**Sætning 4.11** *Antag at $X$ og $Y$ er kompakte metriske rum og lad $q : X \to Y$ være en kontinuert surjektion. Lad endvidere $B$ være en afsluttet delmængde af $Y$ der indeholder samtlige $y \in Y$, for hvilke $q^{-1}(\{y\})$ har mindst to elementer. Endelig sætter vi $A = q^{-1}(B)$ og betragter det kommutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & Y \\ {\scriptstyle j}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ A & \xrightarrow{q'} & B \end{array}$$

*Her er $i$ og $j$ indlejringerne, og $q'$ er restriktionen af $q$ til $A$, opfattet som afbildning på sit billede $B = q(A)$.*
*Under disse forudsætninger vil* $\mathrm{Ker}(q_*) = j_*(\mathrm{Ker}(q'_*))$.

**Bevis.** Ved at anvende funktoren Ext på ovenstående diagram, giver en lille diagramjagt $j_*(\mathrm{Ker}(q'_*)) \subseteq \mathrm{Ker}(q_*)$. Det svære er at vise den omvendte inklusion. Antag derfor, at $z \in \mathrm{Ker}(q_*) \subseteq \mathrm{Ext}(X)$. Da gælder

- Der findes $\tau \in \mathcal{M}on(X)$ og en unital diagonalrepræsentation $\sigma : C(Y) \to \mathbb{B}(H)$, så $z = [\tau]$ og $\pi\sigma = \tau_q$.

Vælg nemlig først $\mu \in \mathcal{M}on(X)$ så $z = [\mu]$. Da $q$ surjektiv er $0 = q_*([\mu]) = [\mu_q]$, dvs. $\mu_q$ splitter. Altså findes unital $*$-homomorfi $\rho : C(Y) \to \mathbb{B}(H)$ med $\pi\rho = \mu_q$. Vælg diagonalrepræsentation $\sigma : C(Y) \to \mathbb{B}(H)$ så $\rho \sim_{\mathcal{K}} \sigma$. Da vil $\sigma$ være unital, og der vil findes $U \in \mathcal{U}(H)$ med $\mathrm{Im}(\sigma - \mathrm{Ad}\, U\, \rho) \subseteq \mathcal{K}$. Dermed

$$\pi\sigma \;=\; \mathrm{Ad}\,\pi(U)\,\pi\rho \;=\; \mathrm{Ad}\,\pi(U)\,\mu_q \;=\; (\mathrm{Ad}\,\pi(U)\,\mu)_q \;.$$

Vi kan derfor sætte $\tau = \mathrm{Ad}\,\pi(U)\,\mu$. ///
Herefter betragtes

$$\mathcal{A} \;=\; \{\, f \in C(X) \mid f_{\mathrm{Res}\,A} \text{ er konstant}\,\},$$

der let ses at være en unital $C^*$-delalgebra af $C(X)$. Vi påstår

- Til hvert $f \in \mathcal{A}$ findes netop et $g \in C(Y)$ med $f = g \circ q$. Dette $g$ betegnes med $\tilde{f}$.

Entydigheden af $g$ følger af surjektiviteten af $q$. For eksistens bemærkes, at ethvert element i $Y$ har formen $q(x)$ for passende $x \in X$, og hvis $q(x_1) = q(x_2)$ vil $f(x_1) = f(x_2)$. Hvis $x_1 = x_2$ er dette nemlig oplagt, og hvis $x_1 \neq x_2$ er $b = q(x_1) = q(x_2)$ i $B$, hvormed $x_1, x_2 \in q^{-1}(B) = A$. Da $f_{\mathrm{Res}\,A}$ er konstant, vil $f(x_1) = f(x_2)$. Altså kan vi veldefinere en afbildning $g : Y \to \mathbb{C}$ ved $g(q(x)) = f(x)$, som pr. konstuktion opfylder $f = g \circ q$. Kontinuiteten af $g$ ses således :

Lad $y_n \to y$ i $Y$. Vi skal vise $g(y_n) \to g(y)$. Det er nok at vise, at enhver delfølge $(y_{n_p})$ af $(y_n)$ har en delfølge $(y_{n_{p_r}})$ så $g(y_{n_{p_r}}) \to g(y)$. Givet $(y_{n_p})$ finder vi $x_p \in X$ med $y_{n_p} = q(x_p)$. Da $X$ er kompakt findes delfølge $(x_{p_r})$ af $(x_p)$ og et $x \in X$ så $x_{p_r} \to x$. Derfor vil

$$q(x) \;=\; \lim q(x_{p_r}) \;=\; \lim y_{n_{p_r}} \;=\; y \;,$$

hvoraf

$$g(y_{n_{p_r}}) \;=\; g(q(x_{p_r})) \;=\; f(x_{p_r}) \;\to\; f(x) \;=\; g(q(x)) \;=\; g(y)\,. \qquad ///$$

Man ser let at afbildningen $\mathcal{A} \to C(Y)$ , $f \mapsto \tilde{f}$ er en unital $*$-homomorfi, og vi kan derfor definere en unital diagonalrepræsentation $\tilde{\sigma} : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ ved $f \mapsto \sigma(\tilde{f})$. Bemærk

$$\tau(f) \;=\; \tau(\tilde{f} \circ q) \;=\; \tau_q(\tilde{f}) \;=\; \pi\sigma(\tilde{f}) \;=\; \pi\tilde{\sigma}(f)$$

for alle $f \in \mathcal{A}$. Faktisk gælder

- $\tilde{\sigma}$ kan udvides til en diagonalrepræsentation $\bar{\sigma} : \mathbb{B}_\infty(X) \to \mathbb{B}(H)$.

Ifølge ovenstående lemma findes nemlig en følge $(y_n)$ i $Y$ så $\sigma(g) = \mathrm{diag}(g(y_n))$ for alle $g \in C(Y)$. Vælg så $x_n \in X$ med $y_n = q(x_n)$. For $f \in \mathcal{A}$ er nu

$$\tilde{\sigma}(f) = \sigma(\tilde{f}) = \mathrm{diag}(\tilde{f}(y_n)) = \mathrm{diag}(\tilde{f}(q(x_n))) = \mathrm{diag}(f(x_n)).$$

Sidste udtryk udvider umiddelbart fra $f \in \mathcal{A}$ til $f \in \mathbb{B}_\infty(X)$. ///

Definer nu

$$X_n = \{x \in X \mid \mathrm{dist}(x, A) \geq 2^{-n}\} \quad , \quad n \geq 1.$$

Bemærk at

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \ldots \quad \text{og} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X \setminus A.$$

Sæt nu $P_n = \bar{\sigma}(1_{X_n})$. Da er $P_1 \leq P_2 \leq \ldots$ en voksende følge af projektioner i $\mathcal{D}$. Vi påstår

- $\tau(f)$ kommuterer med $\pi(P_n)$ for alle $f \in C(X)$.

Påstanden ovenfor gælder i hvert fald for $f \in \mathcal{A}$, thi i dette tilfælde vil $\tau(f) = \pi\tilde{\sigma}(f)$ og $\pi(P_n)$ tilhøre $\pi(\mathcal{D})$ og derfor være ombyttelige. Men hvad hvis $f \notin \mathcal{A}$ ? Hertil defineres kontinuerte funktioner

$$\begin{aligned} k(t) &= 2((t \wedge 1) \vee \frac{1}{2}) - 1 \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ p_n(x) &= k(2^n \mathrm{dist}(x, A)) \quad , \quad x \in X. \end{aligned}$$

Man ser, at $p_n = 1$ på $X_n$ og at $p_n = 0$ på $X \setminus X_{n+1}$. For $x \in A$ har vi $p_n(x) = 0$ og dette viser, at $fp_n \in \mathcal{A}$ for alle $f \in C(X)$. Da altså $p_n 1_{X_n} = 1_{X_n}$ og $p_n 1_{X_{n+1}} = p_n$ vil

$$\begin{aligned} \pi(P_n) &= \pi\bar{\sigma}(1_{X_n}) = \pi\bar{\sigma}(p_n 1_{X_n}) = \tau(p_n)\pi(P_n). \\ \tau(p_n) &= \pi\bar{\sigma}(p_n) = \pi\bar{\sigma}(p_n 1_{X_{n+1}}) = \tau(p_n)\pi(P_{n+1}). \end{aligned}$$

For vilkårligt $f \in C(X)$ og $n \geq 1$ er $f = fp_{n+1} + f(1 - p_{n+1})$ og dermed

$$\begin{aligned} \tau(f)\pi(P_n) &= \tau(fp_{n+1})\pi(P_n) + \tau(f(1 - p_{n+1}))\pi(P_n) \\ &= \tau(fp_{n+1})\pi(P_n) + \tau(f(1 - p_{n+1}))\tau(p_n)\pi(P_n) \\ &= \pi(P_n)\tau(fp_{n+1}) + \tau(f(1 - p_{n+1})p_n)\pi(P_n) \\ &= \pi(P_n)\tau(fp_{n+1}) \quad [\text{idet } (1 - p_{n+1})p_n = 0] \\ &= \pi(P_n)\tau(fp_{n+1}) + \pi(P_n)\tau(p_n)\tau(f(1 - p_{n+1})) \\ &= \pi(P_n)\tau(fp_{n+1}) + \pi(P_n)\tau(f(1 - p_{n+1})) \\ &= \pi(P_n)\tau(f). \qquad /// \end{aligned}$$

Bemærk at vi undervejs viste

$$\pi(P_n)\tau(f) = \pi(P_n)\tau(fp_{n+1}). \tag{10}$$

Lad $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ være en tæt følge i enhedskuglen i $C(X)$. Vælg $T_i \in \mathbb{B}(H)$ så $\pi(T_i) = \tau(f_i)$. Der gælder nu

$$\pi(T_i P_n - P_n T_i) = \tau(f_i)\pi(P_n) - \pi(P_n)\tau(f_i) = 0,$$

altså $T_i P_n - P_n T_i \in \mathcal{K}$ for alle $i, n \in \mathbb{N}$. Sæt nu $P_0 = 0$ og $E_n = P_n - P_{n-1}$ for $n \geq 1$. Vi påstår

- $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en følge af indbyrdes ortogonale projektioner i $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{B}(H)$.

Thi da $P_n \geq P_{n-1}$, er $E_n$ en projektion. Med $X_0 = \emptyset$ er $E_n = \bar{\sigma}(1_{X_n} - 1_{X_{n-1}})$ for $n \geq 1$, og ortogonaliteten følger derfor af at

$$(1_{X_n} - 1_{X_{n-1}})(1_{X_m} - 1_{X_{m-1}}) = 0$$

for $1 \leq n < m$. ///
Vi påstår også

- $T_iE_n - E_nT_i$ og $E_n(T_i - \tilde{\sigma}(f_ip_{n+1}))E_n$ er kompakte for alle $i, n \in \mathbb{N}$.

Da alle $T_iP_n - P_nT_i$ er kompakte vil

$$T_iE_n - E_nT_i = (T_iP_n - P_nT_i) - (T_iP_{n-1} - P_{n-1}T_i) \in \mathcal{K}.$$

På grund af $P_{n-1} = P_{n-1}P_n$ (thi $P_{n-1} \leq P_n$) og (10), fås

$$\begin{aligned}
\pi(E_n(T_i - \tilde{\sigma}(f_ip_{n+1}))E_n) &= \pi(E_n)(\pi T_i - \pi\tilde{\sigma}(f_ip_{n+1}))\pi(E_n) \\
&= (\pi P_n - \pi P_{n-1})(\tau(f_i) - \tau(f_ip_{n+1}))(\pi P_n - \pi P_{n-1}) \\
&= (\pi P_n - \pi P_{n-1}\pi P_n)(\tau(f_i) - \tau(f_ip_{n+1}))(\pi P_n - \pi P_{n-1}) \\
&= 0\,. \qquad ///
\end{aligned}$$

Ved at anvende lemma 4.9 på $E := E_n$, $D_i := \tilde{\sigma}(f_ip_{n+1})$ og $\varepsilon = 2^{-n}$, fås en diagonalprojektion $E_n'$ opfyldende $E_n' \leq E_n$, $E_n - E_n' \in \mathbb{B}_f(H)$ samt

$$\|E_n'(T_i - \tilde{\sigma}(f_ip_{n+1}))E_n'\| < 2^{-n} \quad \text{og} \quad \|E_n'T_i - T_iE_n'\| < 2^{-n}$$

for $1 \leq i \leq n$. Endvidere er $E_n'(T_i - \tilde{\sigma}(f_ip_{n+1}))E_n'$ og $E_n'T_i - T_iE_n'$ kompakte. Da $E_n'$ erne er indbyrdes ortogonale, vil rækken

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} E_n' \ \text{(stærk konvergens)}$$

definere en projektion $P \in \mathcal{D}$. I den stærke topologi haves altså identiteten

$$T_iP - PT_i = \sum_{n=1}^{\infty} T_iE_n' - E_n'T_i\,. \tag{11}$$

For hvert $i \in \mathbb{N}$ er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} E_n'\tilde{\sigma}(f_ip_{n+1})E_n'$ konvergent i den stærke topologi, thi for hvert $x \in H$ er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|E_n'\tilde{\sigma}(f_ip_{n+1})E_n'x\|^2 \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \|E_n'x\|^2 \ < \ \infty,$$

fordi $\|\tilde{\sigma}(f_ip_{n+1})\| \leq 1$ (husk at $|f_i|, |p_k| \leq 1$). En direkte udregning giver herefter

$$PT_iP - \sum_{n=1}^{\infty} E_n'\tilde{\sigma}(f_ip_{n+1})E_n' \ =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n'(T_i - \tilde{\sigma}(f_i p_{n+1}))E_n' \ + \ \sum_{n=1}^{\infty} P(T_i E_n' - E_n' T_i)E_n' \,. \tag{12}$$

Rækkerne (11) og (12) er normkonvergente summer af kompakte operatorer, og derfor selv kompakte. Af (11) konkluderes, at $\pi(P)$ kommuterer med $\tau(f)$ for alle $f \in C(X)$. Bemærk også, at $\pi(P)\pi(P_m) = \pi(P_m)$ for alle $m \geq 1$, thi

$$\begin{aligned} P_m &= \sum_{n=1}^{m} E_n \\ &= \sum_{n=1}^{m} E_n' + \sum_{n=1}^{m} (E_n - E_n') \\ &\leq P + \sum_{n=1}^{m} (E_n - E_n')\,, \end{aligned}$$

hvor sidste led er kompakt. Derfor er $\pi(P_m) \leq \pi(P)$, som ønsket. Vi inddeler nu i tre tilfælde

($a$) $I - P$ er ikke Murray-von Neuman ækvivalent med $I$.
($b$) $P$ er ikke Murray-von Neuman ækvivalent med $I$.
($c$) Både $I - P$ og $P$ er Murray-von Neuman ækvivalent med $I$.

**Ad (a).** I dette tilfælde vil $\pi(P) = \pi(I)$. Vi bemærker at $\tilde{\sigma}(p_{n+1})E_n' = E_n'$, idet

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(p_{n+1})E_n' &= \tilde{\sigma}(p_{n+1})E_n E_n' \\ &= \tilde{\sigma}(p_{n+1})\tilde{\sigma}(1_{X_n} - 1_{X_{n-1}})E_n' \\ &= \tilde{\sigma}(1_{X_n} p_{n+1} - 1_{X_{n-1}} p_{n+1})E_n' \\ &= \tilde{\sigma}(1_{X_n} - 1_{X_{n-1}})E_n' \\ &= E_n E_n' \\ &= E_n'. \end{aligned}$$

Derfor bliver

$$\sigma' : C(X) \to \mathbb{B}(H) \quad , \quad f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} E_n' \tilde{\sigma}(f p_{n+1}) E_n'$$

en $*$-homomorfi, hvorefter (12) viser

$$\begin{aligned} \pi\sigma'(f_i) &= \pi(P)\pi(T_i)\pi(P) \\ &= \pi(I)\tau(f_i)\pi(I) \\ &= \tau(f_i) \end{aligned}$$

for alle $i \in \mathbb{N}$. Altså er $\pi\sigma' = \tau$, hvorfor $z = [\tau] = 0 \in j_*(\mathrm{Ker}(q_*'))$.

**Ad (b).** I dette tilfælde har vi $\pi(P) = 0$. Faktisk er $A = X$ i dette tilfælde (hvilket vises om lidt), og dermed $B = q(A) = q(X) = Y$. I sætningen er $i$ og $j$ altså lighedstegn, $q' = q$, og alt er trivielt.

For at vise $A = X$, er det tilstrækkeligt at vise $f = 0$ når blot $f \in C(X)$ med $f_{\mathrm{Res}\, A} = 0$. Hertil er det nok at vise $f p_n = 0$ for alle $f \in C(X)$ og $n \in \mathbb{N}$, men det er klart, thi $\tau$ er injektiv og

$$\tau(f p_n) \ = \ \pi(P_{n+1})\tau(f p_n) \ = \ \pi(P)\pi(P_{n+1})\tau(f p_n) \ = \ 0.$$

**Ad (c).** Vælg isometrier $S_1, S_2 \in \mathbb{B}(H)$ med $S_1S_1^* = P$ og $S_2S_2^* = I - P$. Da er $(S_1, S_2)$ et par af Cuntz-isometrier. Vi definerer afbildningerne $\tau_i : C(X) \to Q(H)$ ved

$$\tau_i(f) = \pi(S_i^*)\tau(f)\pi(S_i) \quad , \quad f \in C(X) .$$

Da $\pi(S_1S_1^*) = \pi(P)$ og $\pi(S_2S_2^*) = \pi(I - P)$ kommuterer med $\mathrm{Im}(\tau)$, vil $\tau_i \in \mathcal{H}om(X)$. Med betegnelser fra beviset for $(a)$ er $\pi\sigma' = \pi(P)\tau\pi(P)$. Heraf får man, at

$$\tau_1(f) \;=\; \pi(S_1^*\sigma'(f)S_1)$$

for alle $f \in C(X)$, hvor $f \mapsto S_1^*\sigma'(f)S_1$ er en $*$-homomorfi, idet jo $S_1S_1^* = P$ kommuterer med $\mathrm{Im}(\sigma')$. Altså splitter $\tau_1$. Vi viser nu

- Hvis $f \in C(X)$ med $f_{\mathrm{Res}\,A} = 0$, da vil $\tau_2(f) = 0$.

Som bemærket under beviset for $(b)$ vil $\tau(fp_n) = \pi(P)\pi(P_{n+1})\tau(fp_n)$, og dermed

$$\tau_2(fp_n) \;=\; \pi(S_2^*)\pi(S_1S_1^*)\pi(P_{n+1})\tau(fp_n)\pi(S_2) \;=\; 0\,,$$

for alle $f \in C(X)$. Lad nu $f_{\mathrm{Res}\,A} = 0$ og $\varepsilon > 0$ være givet, og vælg $N \in \mathbb{N}$ så $\|f_{\mathrm{Res}\,(X\setminus X_N)}\|_\infty < \varepsilon$ (uniform kontinuitet af $f$). Idet vi skriver $f = fp_N + f(1 - p_N)$ er derfor

$$\|\tau_2(f)\| \;=\; \|\tau_2(f(1 - p_N))\| \;\leq\; \|f(1 - p_N)\|_\infty \;<\; \varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ var vilkårlig, følger det ønskede. ///

Pga. ovenstående • kan vi veldefinere $\tilde{\tau}_2 \in \mathcal{H}om(A)$ ved $\tilde{\tau}_2(g) = \tau_2(g_{\mathrm{udv}})$, hvor $g_{\mathrm{udv}}$ betegner en eller anden kontinuert udvidelse af $g$ til hele $X$, $g \in C(A)$. Bemærk at sådanne udvidelser findes pga. Tietzes sætning. Tag nu $\mu \in \mathcal{M}on(A)$ som splitter. Definer $\rho = \tilde{\tau}_2 \oplus \mu \in \mathcal{M}on(A)$. Tilbage er kun at vise det ønskede

- $[\rho] \in \mathrm{Ker}(q'_*)$ med $j_*([\rho]) = z$.

Bemærk først

$$(\tilde{\tau}_2)_j(f) \;=\; \tilde{\tau}_2(f \circ j) \;=\; \tau_2((f \circ j)_{\mathrm{udv}}) \;=\; \tau_2(f)$$

for alle $f \in C(X)$. Med $S = (S_1, S_2)$ og $\oplus = \oplus_S$ er endvidere

$$\begin{aligned}
(\tau_1 \oplus \tau_2)(f) &= \pi(S_1)\tau_1(f)\pi(S_1^*) + \pi(S_2)\tau_2(f)\pi(S_2^*) \\
&= \pi(P)\tau(f)\pi(P) + \pi(I - P)\tau(f)\pi(I - P) \\
&= \pi(P)\tau(f) + \pi(I - P)\tau(f) \quad [\pi(P) \text{ kommuterer med } \mathrm{Im}(\tau)] \\
&= \tau(f)\,.
\end{aligned}$$

Vælg så $\mu' \in \mathcal{M}on(X)$ triviel. Da $\mu_j \oplus \mu'$ og $\tau_1 \oplus \mu'$ begge tilhører $\mathcal{M}on(X)$ og splitter, fås

$$\begin{aligned}
j_*([\rho]) &= [j_{*\mu'}(\rho)] &&= [\rho_j \oplus \mu'] \\
&= [(\tilde{\tau}_2 \oplus \mu)_j \oplus \mu'] &&= [(\tilde{\tau}_2)_j \oplus (\mu_j \oplus \mu')] \\
&= [(\tilde{\tau}_2)_j \oplus (\tau_1 \oplus \mu')] &&= [(\tau_1 \oplus \tau_2) \oplus \mu'] \\
&= [\tau \oplus \mu'] &&= [\tau] \\
&= z\,.
\end{aligned}$$

Tilbage er kun at vise $[\rho] \in \mathrm{Ker}(q'_*)$. Vi finder, idet $q' : A \to B$ er surjektiv, at

$$q'_*([\rho]) \;=\; [\rho_{q'}] \;=\; [(\tilde{\tau}_2)_{q'} \oplus \mu_{q'}]\,,$$

og det er derfor nok at vise $(\tilde{\tau}_2)_{q'}$ splitter. Vi bemærker først, at $(\tau_2)_q$ splitter, thi for $g \in C(Y)$ er

$$(\tau_2)_q(g) \;=\; \pi(S_2^*)\tau_q(g)\pi(S_2) \;=\; \pi(S_2^*)\pi\sigma(g)\pi(S_2) \;=\; \pi(S_2^*\sigma(g)S_2)\,,$$

hvor $\nu : g \mapsto S_2^*\sigma(g)S_2$ er en unital $*$-homomorfi, idet $S_2S_2^* = I - P$ kommuterer med $\mathrm{Im}(\sigma)$ (begge $\subseteq \mathcal{D}$). Vælg nu ifølge sætning 4.7 en diagonalrepræsentation $\sigma_0 : C(Y) \to \mathbb{B}(H)$ så $\nu \sim_{\mathcal{K}} \sigma_0$. Da er $\sigma_0$ unital, og der findes specielt $U \in \mathcal{U}(H)$ med $\mathrm{Im}(\nu - \mathrm{Ad}\,U\,\sigma_0) \subseteq \mathcal{K}$. Heraf

$$(\tau_2)_q(g) \;=\; \pi\nu(g) \;=\; \pi((\mathrm{Ad}\,U\,\sigma_0)(g))\,.$$

Der findes en følge $(w_n)$ fra $Y$, så $\sigma_0(g) = \mathrm{diag}(g(w_n))$ for alle $g \in C(Y)$. Påstand

- Der gælder $\mathrm{dist}(w_n, B) \to 0$.

Antag for modstrid, at der findes $\delta > 0$ således, at mængden $I = \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, \mathrm{dist}(w_n, B) \geq \delta \,\}$ er uendelig, og sæt $C = \{\, w_n \,|\, n \in I \,\}$. Da er selvfølgelig $\overline{C} \cap B = \emptyset$, og vi kan derfor finde $g \in C(Y)$ opfyldende $0 \leq g \leq 1$ samt $g_{\mathrm{Res}\,B} = 0$ og $g_{\mathrm{Res}\,C} = 1$. Nu er $\pi\sigma_0(g) \neq 0$, og derfor også

$$\tau_2(g \circ q) = (\tau_2)_q(g) = \pi((\mathrm{Ad}\,U\,\sigma_0)(g)) = \pi(U)\,\pi\sigma_0(g)\,\pi(U^*) \neq 0\,.$$

Heraf konkluderes, at $(g \circ q)_{\mathrm{Res}\,A} \neq 0$, altså $g_{\mathrm{Res}\,B} \neq 0$ ... modstrid. ///

Vælg nu følge $(b_n)$ fra $B$ så $\mathrm{dist}(w_n, b_n) \to 0$, og sæt $\sigma_0'(g) = \mathrm{diag}(g(b_1), g(b_2), \ldots)$ for $g \in C(Y)$. Da $|g(w_n) - g(b_n)| \to 0$ vil $\pi\sigma_0' = \pi\sigma_0$, og dermed $(\tau_2)_q = \pi(\mathrm{Ad}\,U\,\sigma_0')$. For $g \in C(B)$ er åbenbart

$$\begin{aligned}(\tilde{\tau}_2)_{q'}(g) &= \tau_2((g \circ q')_{\mathrm{udv}})\\ &= \tau_2(g_{\mathrm{udv}} \circ q)\\ &= (\tau_2)_q(g_{\mathrm{udv}})\\ &= \pi((\mathrm{Ad}\,U\,\sigma_0')(g_{\mathrm{udv}}))\,,\end{aligned}$$

hvor $g_{\mathrm{udv}}$ betegner en eller anden kontinuert udvidelse af $g$ til hele $Y$. Pr. konstruktion er $\sigma_0'(g_{\mathrm{udv}})$ uafhængig af valget af udvidelse af $g$, og derfor definerer $g \to \sigma_0'(g_{\mathrm{udv}})$ en $*$-homomorfi $C(B) \to \mathbb{B}(H)$. Altså splitter $(\tilde{\tau}_2)_{q'}$, og hermed er sætningen endelig bevist. □

Beviset ovenfor er i nogen grad gengivet efter [4, side 268 - 270]. M. Rørdam har dog hjulpet med beviset for, at $\tilde{\tau}_{q'}$ splitter.

**Sætning 4.12** *Funktoren* $\mathrm{Ext} : \mathbb{KM} \to \mathbb{AG}$ *er halvexakt.*

**Bevis.** Lad $X$ være et kompakt metrisk rum og $A$ en afsluttet delmængde af $X$. Idet $j\colon A \to X$ er inklusionsafbildningen og $q : X \to X/A$ kvotientafbildningen, skal vi vise $\mathrm{Im}(j_*) = \mathrm{Ker}(q_*)$.

Vi ønsker at bruge sætning 4.11 på det kompakte metriske rum $Y = X/A$ og den kontinuerte surjektion $q : X \to Y$. Rummet $Y$ indeholder netop et element $y$, hvis urbillede $q^{-1}(\{y\})$ kan bestå af mere end et element - nemlig $y = A$. Med $B = \{A\}$ er selvfølgelig $B$ afsluttet og $A = q^{-1}(B)$. Med betegnelser fra sætning 4.11 er derfor $q' : A \to B$ konstant, og dermed $q'_* = 0$. Heraf

$$\mathrm{Im}(j_*) \;=\; j_*(\mathrm{Ext}(A)) \;=\; j_*(\mathrm{Ker}(q'_*)) \;=\; \mathrm{Ker}(q_*)\ ,$$

som ønsket. □

## 4.4 Disjunkt forening.

For detaljer om den disjunkte forening af topologiske rum, henvises til appendix. Formålet med denne paragraf er at undersøge hvorledes Ext virker på en endelig disjunkt forening. Mere præcist vil vi vise

**Sætning 4.13** *Lad $X_1$ og $X_2$ være kompakte metriske rum med disjunkt forening $X_1 \vee X_2$ og kanoniske indlejringer $j_s : X_s \to X_1 \vee X_2$, $s = 1, 2$. Der findes da netop een gruppehomomorfi*

$$\lambda : \mathrm{Ext}(X_1) \oplus \mathrm{Ext}(X_2) \to \mathrm{Ext}(X_1 \vee X_2)$$

*som for $s = 1, 2$ giver kommutativitet af diagrammerne*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}(X_s) \arrow[rr, "(j_s)_*"] \arrow[dr] & & \mathrm{Ext}(X_1 \vee X_2) \\
& \mathrm{Ext}(X_1) \oplus \mathrm{Ext}(X_2) \arrow[ur, "\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

*Endda er $\lambda$ en isomorfi.*

**Bemærkning 4.14** Vi sætter $Y_s = \mathrm{Im}(j_s)$ og lader $j'_s : X_s \to Y_s$ være afbildningen $j_s$, opfattet som afbildning af $X_s$ på sit billede. Husk, at $Y_s$ både er åben og afsluttet i $X_1 \vee X_2$. Med denne notation bliver altså $j'_s$ en homeomorfi, $X_1 \vee X_2 = Y_1 \cup Y_2$ og $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Med $i_s : Y_s \hookrightarrow Y_1 \cup Y_2$ betegner vi indlejringen. I nedenstående prisme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}(X_s) \arrow[rr, "(j_s)_*"] \arrow[dr] \arrow[dd, "(j'_s)_*"', "\simeq"] & & \mathrm{Ext}(X_1 \vee X_2) \arrow[dd, equal] \\
& \mathrm{Ext}(X_1) \oplus \mathrm{Ext}(X_2) \arrow[ur, dashed, "\lambda"'] \arrow[dd, "(j'_1)_* \oplus (j'_2)_*"', "\simeq"] & \\
\mathrm{Ext}(Y_s) \arrow[rr, "(i_s)_*"] \arrow[dr] & & \mathrm{Ext}(Y_1 \cup Y_2) \\
& \mathrm{Ext}(Y_1) \oplus \mathrm{Ext}(Y_2) \arrow[ur, dashed, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

er de lodrette afbildninger altså gruppeisomorfier. Her er afbildningen $(j'_1)_* \oplus (j'_2)_*$ selvfølgelig givet ved

$$((j'_1)_* \oplus (j'_2)_*)(u_1, u_2) \;=\; (\,(j'_1)_*(u_1)\,,\,(j'_2)_*(u_2)\,) \quad , \quad u_s \in \mathrm{Ext}(X_s)\ .$$

Man ser let, at venstre sideflade kommuterer, men det gør den bageste også, fordi

$$\begin{tikzcd}
X_s \arrow[r, "j_s"] \arrow[d, "j'_s"'] & X_1 \vee X_2 \arrow[d, equal] \\
Y_s \arrow[r, "i_s"'] & Y_1 \cup Y_2
\end{tikzcd}$$

er et kommutativt diagram. Dette betyder (overvej!), at ovenstående sætning kan vises ved at godtgøre, at der findes netop een gruppeisomorfi

$$\mu : \mathrm{Ext}(Y_1) \oplus \mathrm{Ext}(Y_2) \to \mathrm{Ext}(Y_1 \cup Y_2)\ ,$$

som får prismens bundflade til at kommutere for $s = 1, 2$.

**Bevis for sætning 4.13.** Hvis en gruppehomomorfi $\mu$ giver kommutativitet af begge diagrammer, da er $\mu$ entydigt bestemt, idet der for $(u_1, u_2) \in \mathrm{Ext}(Y_1) \oplus \mathrm{Ext}(Y_2)$ gælder

$$\begin{aligned} \mu(u_1, u_2) &= \mu((u_1, 0) + (0, u_2)) \\ &= \mu(u_1, 0) + \mu(0, u_2) \\ &= (i_1)_*(u_1) + (i_2)_*(u_2)\,. \end{aligned}$$

Omvendt er det klart, at der ved fastsættelsen

$$\mu(u_1, u_2) \;=\; (i_1)_*(u_1) + (i_2)_*(u_2)$$

defineres en gruppehomomorfi der giver kommutativitet af de ønskede diagrammer. Tilbage er bijektivitet af $\mu$.

Til dette formål betragtes kvotientrummet $K = (Y_1 \cup Y_2)/Y_1$, hvis elementer jo er $Y_1$ samt $\{y\}$ for $y \in Y_2$. Lad $p : Y_1 \cup Y_2 \to K$ være kvotientafbildningen. Vælg så $y_s \in Y_s$, og definer retraktionerne $r_s : Y_1 \cup Y_2 \to Y_s$ ved

$$r_1(y) = \begin{cases} y & \text{hvis } y \in Y_1 \\ y_1 & \text{hvis } y \in Y_2 \end{cases} \qquad\qquad r_2(y) = \begin{cases} y_2 & \text{hvis } y \in Y_1 \\ y & \text{hvis } y \in Y_2 \end{cases}$$

Definer endvidere $i : Y_2 \to K$ ved $i(y) = \{y\}$, samt $r : K \to Y_2$ ved $r(\{y\}) = y$ for $y \in Y_2$ og $r(Y_1) = y_2$. Endelig lader vi $S^0 = K/\mathrm{Im}(i)$ være kvotientrummet, som altså er et diskret to-punktsrum. Idet $q : K \to S^0$ er kvotientafbildningen, har vi diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & & S^0 \\
Y_1 \arrow[r, shift left, "i_1"] & Y_1 \cup Y_2 \arrow[l, shift left, "r_1"] \arrow[r, "p"] \arrow[dr, shift left, "r_2"] & K \arrow[u, "q"] \arrow[d, shift left, "r"] \\
 & & Y_2 \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[ul, shift left, "i_2"]
\end{tikzcd}$$

Det er let at se, at alle afbildninger i diagrammet er kontinuerte. Vi bemærker straks

(1) $r_s i_s = \mathrm{id}_{Y_s}$ og $ri = \mathrm{id}_{Y_2}$, hvormed $r_{s*} i_{s*} = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(Y_s)}$ og $r_* i_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(Y_2)}$.
(2) $r_1 i_2$ og $r_2 i_1$ er konstante, og dermed $r_{1*} i_{2*} = 0$ samt $r_{2*} i_{1*} = 0$.
(3) $p\, i_2 = i$ og $r\, p = r_2$.

Injektiviteten af $\mu$ følger af, at der for $u_s \in \mathrm{Ext}(Y_s)$ gælder

$$r_{s*}(\mu(u_1, u_2)) \;=\; r_{s*}(i_{1*}(u_1) + i_{2*}(u_2)) \;=\; u_s\,.$$

Bemærk herefter, at halvexakthed af Ext, anvendt på $Y_2 \xrightarrow{i} K \xrightarrow{q} S^0$ , giver surjektivitet af $i_*$, idet jo $S^0$ er totalt usammenhængende. Da også $r_* i_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(Y_2)}$, konkluderer vi, at $i_*$ faktisk er en isomorfi med invers $r_*$. Ved at betragte $Y_1 \xrightarrow{i_1} Y_1 \cup Y_2 \xrightarrow{p} K$ , fås også $\mathrm{Im}(i_{1*}) = \mathrm{Ker}(p_*)$. Lad nu $u \in \mathrm{Ext}(Y_1 \cup Y_2)$ være givet. Idet

$$\begin{aligned} p_*(u - i_{2*} r_{2*}(u)) &= p_*(u) - i_* r_{2*}(u) \\ &= p_*(u) - i_* r_* p_*(u) \\ &= p_*(u) - p_*(u) \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

er altså $u - i_{2*} r_{2*}(u) \in \mathrm{Ker}(p_*) = \mathrm{Im}(i_{1*})$. Følgelig findes $u_1 \in \mathrm{Ext}(Y_1)$ med $i_{1*}(u_1) = u - i_{2*} r_{2*}(u)$, hvilket viser at $\mu(u_1, r_{2*}(u)) = u$. Dette viser surjektivitet af $\mu$, og dermed sætningen. □

**Bemærkning 4.15** Bemærkning 4.14 holder faktisk for enhver kovariant funktor $T : \mathbb{KM} \to \mathbb{AG}$. Hvis $T$ tillige er halvexakt og $T(X) = 0$ når $X$ er et diskret to-punktsrum, da holder sætning 4.13 åbenbart også. Beviset er fundet i [2].

**Bemærkning 4.16** Når misforståelser skal undgås, skrives $\lambda_{X_1, X_2}$ for isomorfien

$$\lambda \,:\, \mathrm{Ext}(X_1) \oplus \mathrm{Ext}(X_2) \;\to\; \mathrm{Ext}(X_1 \vee X_2).$$

**Korollar 4.17** *Lad $X_1$ og $X_2$ være kompakte metriske rum med disjunkt forening $X_1 \vee X_2$ og kanoniske indlejringer $j_s : X_s \to X_1 \vee X_2$, $s = 1, 2$. Da er gruppehomomorfierne*

$$(j_s)_* : \mathrm{Ext}(X_s) \to \mathrm{Ext}(X_1 \vee X_2)$$

*injektive.*

## 4.5 Mayer-Vietoris' følge.

**Bemærkning 4.18** Lad $G_1$, $G_2$, $H_1$ og $H_2$ være grupper. Hvis $\alpha_s : G_1 \oplus G_2 \to H_s$ og $\beta : H_1 \to H_2$ er gruppehomomorfier, og $\nu_s : G_s \to G_1 \oplus G_2$ den kanoniske indlejring, da vil diagrammet

$$\begin{tikzcd} & G_1 \oplus G_2 \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ H_1 \arrow[rr, "\beta"'] & & H_2 \end{tikzcd}$$

kommutere, hvis og kun hvis begge diagrammer

$$\begin{tikzcd} & G_s \arrow[dl, "\alpha_1 \nu_s"'] \arrow[dr, "\alpha_2 \nu_s"] & \\ H_1 \arrow[rr, "\beta"'] & & H_2 \end{tikzcd}$$

gør det $(s = 1, 2)$.

**Sætning 4.19** *Lad $X$ være kompakt og metrisk, og lad $B_1$ og $B_2$ være to afsluttede delmængder af $X$ med $X = B_1 \cup B_2$, og antag at $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Idet*

$$i_s : B_1 \cap B_2 \hookrightarrow B_s \quad \text{og} \quad j_s : B_s \hookrightarrow X$$

*betegner indlejringerne, har vi en exakt følge*

$$\mathrm{Ext}(B_1 \cap B_2) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}(B_1) \oplus \mathrm{Ext}(B_2) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ext}(X) \quad .$$

*Her er homomorfierne $\alpha$ og $\beta$ givet ved*

$$\begin{array}{rcll} \alpha(u) & = & ((i_1)_*(u), (i_2)_*(-u)) & , \quad u \in \mathrm{Ext}(B_1 \cap B_2) \\ \beta(u_1, u_2) & = & (j_1)_*(u_1) + (j_2)_*(u_2) & , \quad u_s \in \mathrm{Ext}(B_s) \ . \end{array}$$

**Bevis.** Bemærk først, at $\alpha$ og $\beta$ virkelig *er* gruppehomomorfier. Vi har selvfølgelig $j_1 i_1 = j_2 i_2$, og dermed også $(j_1)_* (i_1)_* = (j_2)_* (i_2)_*$. Det er derfor klart, at $\beta\,\alpha = 0$, altså $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)$.

For den omvendte inklusion betragtes $A = B_1 \cap B_2$, samt de disjunkte foreninger $A \vee A$ og $B_1 \vee B_2$, i følgende konkrete realisationer

$$\begin{array}{rcl} A \vee A & = & (A \times \{1\}) \ \cup \ (A \times \{2\}) \\ B_1 \vee B_2 & = & (B_1 \times \{1\}) \ \cup \ (B_2 \times \{2\}). \end{array}$$

Idet $A \subseteq B_s$, opnås på denne måde $A \vee A \subseteq B_1 \vee B_2$. Lad så

$$p = j_1 \vee j_2 \ : \ B_1 \vee B_2 \ \to \ X$$

være den kanoniske kontinuerte afbildning, som i dette tilfælde bliver surjektiv, idet $X = B_1 \cup B_2$. Vi bemærker først

(1) Hvis $x \in X$ og $p^{-1}(\{x\})$ indeholder mindst to (forskellige) elementer, da vil $x \in A$.
(2) $p^{-1}(A) = A \vee A$.
(3) Vi har et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ext}(B_1) \oplus \mathrm{Ext}(B_2) \arrow[dl, "\lambda_{B_1,B_2}"', "\simeq"] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \mathrm{Ext}(B_1 \vee B_2) \arrow[rr, "p_*"'] & & \mathrm{Ext}(X) \end{tikzcd}$$

**Ad (1).** Antag $p(z_1) = x = p(z_2)$ hvor $z_1 \neq z_2$ i $B_1 \vee B_2$. Hvert $z_i$ har altså enten formen $(x, 1)$ med $x \in B_1$, eller $(x, 2)$ med $x \in B_2$. Da $z_1 \neq z_2$, konkluderer vi, at $x$ tilhører *både* $B_1$ og $B_2$, altså $x \in A$.
**Ad (2).** Inklusionen $\supseteq$ klar, thi $p(a, s) = a \in A$ når $(a, s) \in A \vee A$ (dvs. $a \in A$ og $s \in \{1, 2\}$). Antag omvendt, at $z \in p^{-1}(A)$, dvs. $z \in B_1 \vee B_2$ med $p(z) \in A$. Find $s \in \{1, 2\}$ og $b \in B_s$ så $z = (b, s)$. Da $b = p(z) \in A$ er altså $z = (b, s) \in A \times \{s\} \subseteq A \vee A$.
**Ad (3).** Idet $\nu_s : \mathrm{Ext}(B_s) \to \mathrm{Ext}(B_1) \oplus \mathrm{Ext}(B_2)$ betegner den kanoniske indlejring, giver ovenstående bemærkning, at det er nok at vise kommutativitet af

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ext}(B_s) \arrow[dl, "\lambda_{B_1,B_2}\nu_s"', "\simeq"] \arrow[dr, "\beta\nu_s"] & \\ \mathrm{Ext}(B_1 \vee B_2) \arrow[rr, "p_*"'] & & \mathrm{Ext}(X) \end{tikzcd}$$

Lad derfor $\sigma_s : B_s \to B_1 \vee B_2$ være den kanoniske indlejring, og betragt tetraederne

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ext}(B_s) \arrow[dl, "\nu_s"'] \arrow[dr, "(j_s)_*"] \arrow[dd, "(\sigma_s)_*"] & \\
\mathrm{Ext}(B_1) \oplus \mathrm{Ext}(B_2) \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\lambda_{B_1,B_2}"'] & & \mathrm{Ext}(X) \\
& \mathrm{Ext}(B_1 \vee B_2) \arrow[ur, "p_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Venstre sideflade kommuterer ifølge sætningen om disjunkt forening, og $\beta$ er lavet til at få bageste sideflade til at kommutere. Kommutativiteten af højre sideflade, fås ved at anvende Ext på den kommutative trekant

$$\begin{tikzcd}
& B_s \arrow[dl, "\sigma_s"'] \arrow[dr, "j_s"] & \\
B_1 \vee B_2 \arrow[rr, "p"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Vi finder derfor

$$p_* \, \lambda_{B_1,B_2} \, \nu_s \;=\; p_* \, (\sigma_s)_* \;=\; (j_s)_* \;=\; \beta \, \nu_s \; .$$

Dette afslutter beviset for (3).

Antag så, at $(u_1, u_2) \in \mathrm{Ker}(\beta)$. Pga. (3) er $\lambda_{B_1,B_2}(u_1, u_2) \in \mathrm{Ker}(p_*)$. Pga. (1) og (2) kan vi anvende sætning 4.11 på

$$\begin{tikzcd}
B_1 \vee B_2 \arrow[r, "p"] & X \\
A \vee A \arrow[u, "i"] \arrow[r, "p'"'] & A \arrow[u, "j_1 i_1"']
\end{tikzcd}$$

til at finde $w \in \mathrm{Ker}(p'_*)$ med $\lambda_{B_1,B_2}(u_1, u_2) = i_*(w)$. Da specielt $w \in A \vee A$, findes $(v_1, v_2) \in \mathrm{Ext}(A) \oplus \mathrm{Ext}(A)$ så $w = \lambda_{A,A}(v_1, v_2)$. Idet $\theta_s : A \to A \vee A$, $s = 1, 2$ er de kanoniske indlejringer, er selvfølgelig $p'\theta_s = \mathrm{id}_A$. Dermed bliver

$$\begin{aligned}
v_1 + v_2 &= p'_*(\theta_1)_*(v_1) + p'_*(\theta_2)_*(v_2) \\
&= p'_*((\theta_1)_*(v_1) + (\theta_2)_*(v_2)) \\
&= p'_*\lambda_{A,A}(v_1, v_2) \\
&= p'_*(w) \\
&= 0 \, .
\end{aligned}$$

Bemærk herefter det kommutative kvadrat

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\theta_s"] \arrow[d, "i_s"'] & A \vee A \arrow[d, "i"] \\
B_s \arrow[r, "\sigma_s"'] & B_1 \vee B_2
\end{tikzcd}$$

som giver

$$\begin{aligned}\lambda_{B_1,B_2}((i_1)_*(v_1),(i_2)_*(v_2)) &= (\sigma_1)_*(i_1)_*(v_1)+(\sigma_1)_*(i_2)_*(v_2)\\ &= i_*(\theta_1)_*(v_1)+i_*(\theta_2)_*(v_2)\\ &= i_*((\theta_1)_*(v_1)+(\theta_2)_*(v_2))\\ &= i_*\lambda_{A,A}(v_1,v_2)\\ &= i_*(w)\\ &= \lambda_{B_1,B_2}(u_1,u_2)\ .\end{aligned}$$

Derfor konkluderes $(i_s)_*(v_s)=u_s$ for $s=1,2$. Endelig fås

$$\begin{aligned}(u_1,u_2) &= ((i_1)_*(v_1),(i_2)_*(v_2))\\ &= ((i_1)_*(v_1),(i_2)_*(-v_1))\\ &= \alpha(v_1)\ ,\end{aligned}$$

hvilket viser $(u_1,u_2)\in \mathrm{Im}(\alpha)$. □

Beviset ovenfor er kraftigt inspireret af et tilsvarende afsnit i [1].

## 4.6 Ext og projektiv limes.

Vi definerer

$\mathbb{KM}_\bullet$ : Kategorien af følger af kompakte metriske rum og translationer.
$\mathbb{AG}_\bullet$ : Kategorien af følger af abelske grupper og translationer.

Følger og translationer betegnes med index $\bullet$, f.eks. $X_\bullet$ og $j_\bullet$. Den projektive limes betegnes lim, og der forudsættes kendskab til denne i det omfang den står beskrevet i appendix. Eksempelvis benyttes, at $\lim:\mathbb{KM}_\bullet\to\mathbb{KM}$ er en exakt funktor.

Lad nu $T:\mathbb{KM}\to\mathbb{AG}$ være en kovariant funktor. På oplagt måde inducerer $T$ en kovariant funktor $T:\mathbb{KM}_\bullet\to\mathbb{AG}_\bullet$, som vi også betegner $T$. Lad herefter

$$X_\bullet \;=\; \cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} X_0$$

være en følge i $\mathbb{KM}_\bullet$ med kanoniske afbildninger $p_n:\lim X_\bullet\to X_n$. Ved at anvende $T$ på $X_\bullet$ fås en følge i $\mathbb{AG}_\bullet$ :

$$T(X_\bullet) \;=\; \cdots \longrightarrow T(X_n) \xrightarrow{Tf_n} T(X_{n-1}) \xrightarrow{Tf_{n-1}} \cdots \xrightarrow{Tf_1} T(X_0)\ .$$

Denne følge har en projektiv limes, $\lim T(X_\bullet)$, med kanoniske afbildninger $r_n:\lim T(X_\bullet)\to T(X_n)$. Vi har et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} & T(X_n) \arrow[r, "Tf_n"] & T(X_{n-1}) \\ T(\lim X_\bullet) \arrow[ur, "Tp_n"] \arrow[urr, "Tp_{n-1}"'] & & \end{tikzcd}$$

og der findes derfor netop een gruppehomomorfi

$$\kappa_T^{X_\bullet}:\ T(\lim X_\bullet)\to \lim T(X_\bullet)$$

med $Tp_n=r_n\kappa_T^{X_\bullet}$ for alle $n\geq 0$.

**Sætning 4.20** *Homomorfien* $\kappa_T^{X_\bullet}$ *er naturlig i* $X_\bullet$*, dvs. hvis* $t_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ *er en translation i* $\mathbb{KM}_\bullet$*, da har vi et kommutativt diagram*

$$\begin{tikzcd} T(\lim X_\bullet) \arrow[r, "\kappa_T^{X_\bullet}"] \arrow[d, "T(\lim t_\bullet)"'] & \lim T(X_\bullet) \arrow[d, "\lim T(t_\bullet)"] \\ T(\lim Y_\bullet) \arrow[r, "\kappa_T^{Y_\bullet}"'] & \lim T(Y_\bullet) \end{tikzcd}$$

**Bevis.** Lad $p_n : \lim X_\bullet \to X_n$ , $q_n : \lim Y_\bullet \to Y_n$ , $r_n : \lim T(X_\bullet) \to T(X_n)$ og $s_n : \lim T(Y_\bullet) \to T(Y_n)$ være de kanoniske afbildninger. Eftersom

$$\begin{tikzcd} & T(Y_n) \arrow[r] & T(Y_{n-1}) \\ T(\lim X_\bullet) \arrow[ur, "T(t_n p_n)"] \arrow[urr, "T(t_{n-1}p_{n-1})"'] & & \end{tikzcd}$$

kommuterer, findes der netop een homomorfi $\varphi$, som giver kommutativitet af

$$\begin{tikzcd} \lim T(Y_\bullet) \arrow[dr, "s_n"] & \\ & T(Y_n) \\ T(\lim X_\bullet) \arrow[uu, "\varphi"] \arrow[ur, "T(t_n p_n)"'] & \end{tikzcd}$$

Det ønskede følger derfor, når vi har vist, at både $\varphi = \lim T(t_\bullet) \circ \kappa_T^{X_\bullet}$ og $\varphi = \kappa_T^{Y_\bullet} \circ T(\lim t_\bullet)$ gør ovenstående diagram kommutativt. Dette ses ved at betragte de kommutative

$$\begin{tikzcd} \lim T(Y_\bullet) \arrow[dr, "s_n"] & \\ & T(Y_n) \\ \lim T(X_\bullet) \arrow[uu, "\lim T(t_\bullet)"] \arrow[dr, "r_n"] & \\ & T(X_n) \arrow[uu, "T(t_n)"'] \\ T(\lim X_\bullet) \arrow[uu, "\kappa_T^{X_\bullet}"] \arrow[ur, "T(p_n)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \lim T(Y_\bullet) \arrow[dr, "s_n"] & \\ & T(Y_n) \\ T(\lim Y_\bullet) \arrow[uu, "\kappa_T^{Y_\bullet}"] \arrow[ur, "T(q_n)"] & \\ & T(X_n) \arrow[uu, "T(t_n)"'] \\ T(\lim X_\bullet) \arrow[uu, "T(\lim t_\bullet)"] \arrow[ur, "T(p_n)"'] & \end{tikzcd}$$

□

Vi er selvfølgelig specielt interesseret i tilfældet $T = \text{Ext}$, hvorom der gælder

**Sætning 4.21** *For enhver følge $X_\bullet$ i $\mathbb{KM}_\bullet$, har vi surjektivitet af*

$$\kappa^{X_\bullet}_{\mathrm{Ext}} : \mathrm{Ext}(\lim X_\bullet) \to \lim \mathrm{Ext}(X_\bullet) \, .$$

**Bevis.** Vi skriver $f_n : X_n \to X_{n-1}$, samt $q_n : \lim X_\bullet \to X_n$ og $r_n : \lim \mathrm{Ext}(X_\bullet) \to \mathrm{Ext}(X_n)$ for de kanoniske afbildninger.

Vi antager først, at alle $f_n$ er surjektive. Lad $([\rho_n])_{n\geq 0}$ i $\lim \mathrm{Ext}(X_\bullet)$ være givet. Vi kan vælge en følge af $*$-monomorfier $\tau_n : C(X_n) \to Q(H)$ så $[\tau_n] = [\rho_n]$ i $\mathrm{Ext}(X_n)$ og så $(\tau_{n+1})_{f_{n+1}} = \tau_n$ for alle $n \geq 0$. Dette ses således:

Lad $\tau_0 = \rho_0$. Antag så at $\tau_n$ er defineret for et eller andet $n \geq 0$. Vi konstruerer $\tau_{n+1}$ rekursivt. Idet $f_{n+1}$ er surjektiv fås

$$[(\rho_{n+1})_{f_{n+1}}] \;=\; (f_{n+1})_*([\rho_{n+1}]) \;=\; [\rho_n] \;=\; [\tau_n].$$

Altså findes unitær $U \in \mathcal{U}(H)$ så

$$\tau_n \;=\; \mathrm{Ad}\,\pi(U)\,(\rho_{n+1})_{f_{n+1}} \;=\; (\mathrm{Ad}\,\pi(U)\,\rho_{n+1})_{f_{n+1}} \, ,$$

og vi kan derfor sætte $\tau_{n+1} = \mathrm{Ad}\,\pi(U)\,\rho_{n+1}$. Herefter betragtes

$$\mathcal{A}_n = \{g \circ q_n \mid g \in C(X_n)\} \, ,$$

der let ses at være en stigende følge af unitale $C^*$-delalgebraer af $C(\lim X_\bullet)$. Derfor er $\mathcal{A} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{A}_n$ en $*$-algebra, men endda tæt i $C(\lim X_\bullet)$, hvilket ses således :

Givet $x' \neq x''$ i $\lim X_\bullet$. Da findes $n \geq 0$ så $q_n(x') \neq q_n(x'')$, og dermed $g \in C(X_n)$ med $g(q_n(x')) \neq g(q_n(x''))$. Altså separerer $\mathcal{A}$ punkter i $\lim X_\bullet$, hvorefter Stone-Weierstrass giver tætheden af $\mathcal{A}$ (som jo indeholder konstanterne).

Vi ønsker at definere en afbildning $\tau : \mathcal{A} \to Q(H)$ ved $\tau(g \circ q_n) = \tau_n(g)$ når $g \in C(X_n)$. At dette er en lovlig definition indses på følgende måde:

Antag $g_n \circ q_n = g_m \circ q_m$ for $g_n \in C(X_n)$ , $g_m \in C(X_m)$ og $m \leq n$. Da er $h = g_m \circ f_{m+1} \circ \cdots \circ f_n$ element i $C(X_n)$. Kommutativitet af

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "q_n"'] \arrow[dr, "q_m"] & \\ X_n \arrow[rr, "f_{m+1}\circ\cdots\circ f_n"'] & & X_m \end{tikzcd}$$

giver så $h \circ q_n = g_m \circ q_m = g_n \circ q_n$. Altså stemmer $h$ og $g_n$ overens på $\mathrm{Im}(q_n) = X_n$ (se korollar C.11), altså $h = g_n$, hvormed

$$\tau_n(g_n) = \tau_n(h) = \tau_n(g_m \circ f_{m+1} \circ \cdots \circ f_n) = (\tau_n)_{f_{m+1}\circ\cdots\circ f_n}(g_m) = \tau_m(g_m).$$

Dette viser veldefineretheden af $\tau$. For hvert $n \geq 0$ er selvfølgelig er $\tau : \mathcal{A}_n \to Q(H)$ en injektiv $*$-homomorfi og derfor isometrisk. Derfor er $\tau : \mathcal{A} \to Q(H)$ en isometrisk, $*$-bevarende algebrahomomorfi. Tætheden af $\mathcal{A}$ i $C(\lim X_\bullet)$ udvider nu $\tau$, på entydig måde, til en isometrisk $*$-homomorfi $\tilde{\tau}$ defineret på hele $C(\lim X_\bullet)$. Altså er $\tilde{\tau}$ en $*$-monomorfi og dermed et element i $\mathcal{M}on(\lim X_\bullet)$. For $g \in C(X_n)$ gælder

$$\tilde{\tau}_{q_n}(g) \;=\; \tilde{\tau}(g \circ q_n) \;=\; \tau(g \circ q_n) \;=\; \tau_n(g)$$

og derfor

$$r_n(\kappa_{\mathrm{Ext}}^{X_\bullet}([\tilde{\tau}])) \;=\; q_{n*}([\tilde{\tau}]) \;=\; [\tilde{\tau}_{q_n}] \;=\; [\tau_n] \;=\; [\rho_n] \ .$$

Dette viser, at $\kappa_{\mathrm{Ext}}^{X_\bullet}([\tilde{\tau}]) = ([\rho_n])_{n\geq 0}$, og dermed surjektiviteten af $\kappa_{\mathrm{Ext}}^{X_\bullet}$.

Endelig behandles det generelle tilfælde, hvor vi ikke nødvendigvis har surjektivitet af $f_n$'erne. Lad $C$ være Cantormængden og definer $Y_n = X_n \vee C$ samt de kanoniske indlejringer $j_n : X_n \to Y_n$. Da $Y_n$ er kompakt metrisk, findes kontinuerte surjektioner $k_n : C \to Y_{n-1}$ , $n \geq 1$. Med betegnelserne fra definition A.4, har vi derfor kontinuerte surjektioner

$$g_n = j_{n-1} f_n \vee k_n \;\; : \;\; Y_n \to Y_{n-1} \ ,$$

og dermed en følge i $\mathbb{KM}_\bullet$ :

$$Y_\bullet \;=\; \cdots \longrightarrow Y_n \xrightarrow{g_n} Y_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} \cdots \xrightarrow{g_1} Y_0 \ .$$

Man indser let, at $j_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ er en injektiv translation, og derfor vil også $\lim j_\bullet : \lim X_\bullet \to \lim Y_\bullet$ være injektiv. Naturligheden af $\kappa_{\mathrm{Ext}}$ giver det kommutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}(\lim X_\bullet) \arrow[r, "\kappa_{\mathrm{Ext}}^{X_\bullet}"] \arrow[d, "(\lim j_\bullet)_*"'] & \lim \mathrm{Ext}(X_\bullet) \arrow[d, "\lim (j_{n*})_{n\geq 0}"] \\
\mathrm{Ext}(\lim Y_\bullet) \arrow[r, "\kappa_{\mathrm{Ext}}^{Y_\bullet}"'] & \lim \mathrm{Ext}(Y_\bullet)
\end{tikzcd}$$

Bevisets første del giver, at $\kappa_{\mathrm{Ext}}^{Y_\bullet}$ er surjektiv, og det er derfor nok at godtgøre, at $(\lim j_\bullet)_*$ er surjektiv og $\lim (j_{n*})_{n\geq 0}$ er isomorfi.

Da $\mathrm{Ext}(C) = 0$, giver sætningen om disjunkt forening, at $j_{n*} : \mathrm{Ext}(X_n) \to \mathrm{Ext}(Y_n)$ er en isomorfi. Da alle $j_{n*}$ er isomorfier, er også $\lim (j_{n*})_{n\geq 0}$ en isomorfi.

Da $Y_n/\mathrm{Im}(j_n)$ er homeomorf med $C \vee \{\cdot\}$ - den disjunkte forening af $C$ og et punkt - er $Y_n/\mathrm{Im}(j_n)$ totalt usammenhængende. Hver følge

$$X_n \xrightarrow{j_n} Y_n \longrightarrow Y_n/\mathrm{Im}(j_n)$$

er kortexakt, og exaktheden af $\lim : \mathbb{KM}_\bullet \to \mathbb{KM}$ (sætning C.10) giver, at $(\lim Y_\bullet)/\mathrm{Im}(\lim j_\bullet)$ er homeomorf med en (afsluttet) delmængde af $\prod Y_n/\mathrm{Im}(j_n)$, som er totalt usammenhængende, hvormed også $(\lim Y_\bullet)/\mathrm{Im}(\lim j_\bullet)$ er totalt usammenhængende. Halvexakthed af Ext, anvendt på den kortexakte

$$\lim X_\bullet \xrightarrow{\lim j_\bullet} \lim Y_\bullet \longrightarrow (\lim X_\bullet)/\mathrm{Im}(\lim j_\bullet) \ ,$$

giver endelig surjektivitet af $(\lim j_\bullet)_*$. Dette viser sætningen. □

# 5 Anvendelser.

Til slut vil vi kort nævne teoriens helt store triumf i forbindelse med klassifikation af essentielt normale operatorer. Ideen er at benytte afbildningen $\gamma_X : \mathrm{Ext}(X) \to \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$. Det viser sig nemlig, at man for kompakte delmængder af den komplekse plan kan karakterisere $\pi^1(X)$ som følger

**Sætning 5.1** *Hvis $X \subseteq \mathbb{C}$ er kompakt, og $\Lambda$ er en mængde, der fremkommer ved at vælge netop et punkt i hver begrænset sammenhængskomponent for $\mathbb{C} \setminus X$, da er $\pi^1(X)$ isomorf med den fri gruppe frembragt af homotopiklasserne $[z - \lambda]$, hvor $\lambda$ gennemløber $\Lambda$.*

**Bevis.** Se [4, Thm 9.7.1] □

Herefter kan man, blandt andet ved at benytte sætningen om projektiv limes, bevise følgende dybe

**Hovedsætning 5.2** *For en kompakt mængde $X \subseteq \mathbb{C}$ er afbildningen $\gamma_X$ en isomorfi af $Ext(X)$ på $Hom(\pi^1(X), \mathbb{Z})$.*

**Bevis.** Se [4, Thm 9.7.2]. □

Beviset for sidste påstand er ret omfattende. Vi ser i stedet på nogle anvendelser.

**Definition 5.3** Hvis $T$ er essentielt normal kan vi betragte afbildningen

$$\mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}_{ess}(T) \to \mathbb{Z}, \quad \lambda \mapsto \mathrm{index}(T - \lambda).$$

Denne afbildning kaldes for *indeksfunktionen for $T$*. Den siges at være *triviel*, såfremt den er konstant lig 0.

**Korollar 5.4** *For to essentielt normale operatorer $T_1$ og $T_2$ er følgende betingelser ækvivalente*

(1) *$T_1$ og $T_2$ er kompalente*;
(2) *$T_1$ og $T_2$ har samme essentielle spektrum og samme indeksfunktion.*

**Bevis.** (1) $\Rightarrow$ (2). Vælg $U \in \mathcal{U}(H)$, således at $T_1 - UT_2U^* = K \in \mathcal{K}$. Det er da klart, at $T_1$ og $T_2$ har samme essentielle spektrum $X$, og for $\lambda \in \mathbb{C} \setminus X$ er

$$\begin{aligned} \mathrm{index}(T_1 - \lambda) &= \mathrm{index}(UT_2U^* + K - \lambda) = \mathrm{index}(UT_2U^* - \lambda) \\ &= \mathrm{index}(U(T_2 - \lambda)U^*) = \mathrm{index}(T_2 - \lambda). \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Da $T_1$ og $T_2$ er essentielt normale med samme essentielle spektrum $X$ defineres ifølge sætning 1.8 to extensioner $\tau_1$ og $\tau_2$ af $\mathcal{K}$ med $C(X)$, og disse er givet ved at $\tau_i(f) = f(\pi(T_i)$. Nu gælder for $\lambda \in \mathbb{C} \setminus X$, at

$$\begin{aligned} \gamma_X([\tau_1])([z - \lambda]) &= \mathrm{ind}(\tau_1(z - \lambda)) = \mathrm{ind}(\pi(T_1) - \lambda)) \\ &= \mathrm{index}(T_1 - \lambda) = \mathrm{index}(T_2 - \lambda) \\ &= \gamma_X([\tau_2])([z - \lambda]). \end{aligned}$$

Af sætning 5.1 får vi nu, at $\gamma_X([\tau_1]) = \gamma_X([\tau_2])$, og hovedsætning 5.2 giver så , at de tilhørende extensioner er ækvivalente. Endelig giver sætning 1.10, at $T_1$ og $T_2$ er kompalente. □

**Korollar 5.5** *For $T \in \mathbb{B}(H)$ er følgende betingelser ækvivalente :*

(1) *$T$ har formen "normal + kompakt" ;*
(2) *$T$ er essentielt normal og har triviel indeksfunktion.*

**Bevis.** Vi bemærker først, at hvis $N$ er en normal Fredholm operator, da er $\mathrm{index}(N) = 0$. Dette gælder fordi $N$ og $N^*$ er metrisk ens, hvormed kernerne er ens.
(1) $\Rightarrow$ (2). Hvis $T$ har formen $T = N + K$ med $N$ normal og $K$ kompakt, da ses det let, at $T$ er essentielt normal. Endvidere har vi for $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}_{ess}(T)$, at

$$\mathrm{index}(T - \lambda) = \mathrm{index}(N - \lambda) = 0,$$

fordi $N - \lambda$ er normal Fredholm.
(2) $\Rightarrow$ (1). Antag (2). Vi vil finde en normal operator $N \in \mathbb{B}$ med $\mathrm{sp}_{ess}(N) = \mathrm{sp}_{ess}(T)$. Vælg hertil en tæt følge $(\lambda_n)$ i $\mathrm{sp}_{ess}(T)$ med den egenskab, at hvert $\lambda_n$ gentages uendeligt mange gange. Sæt $N = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$. Så er $N$ normal med

$$\mathrm{sp}_{ess}(N) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots\}} = \mathrm{sp}_{ess}(T).$$

Da $N$ og $T$ er essentielt normale, der begge har triviel indeksfunktion, giver korollar 5.4, at $N$ og $T$ er kompalente. Altså findes en unitær $U \in \mathcal{U}(H)$ med $T = UNU^* + K$, hvor $K$ er kompakt. Det ses let, at $UNU^*$ er normal. □

Som et sidste korollar nævner vi

**Korollar 5.6** *Mængden af operatorer af formen "normal + kompakt" udgør en normlukket delmængde af $\mathbb{B}(H)$.*

**Bevis.** Antag at $T_n$ har formen "normal + kompakt" og konvergerer mod $T$. Da vil $T^*T - TT^* = \lim (T_n^* T_n - T_n T_n^*)$ være kompakt. Da mængden af Fredholm operatorer er åben og Fredholmindekset er kontinuert, følger, at hvis $\lambda \notin \mathrm{sp}_{ess}(T)$, da vil også $\lambda \notin \mathrm{sp}_{ess}(T_n)$ fra et vist trin, samt

$$\mathrm{index}(T - \lambda) \;=\; \lim \mathrm{index}(T_n - \lambda) \;=\; 0\ .$$

Af korollaret ovenfor følger nu det ønskede. □

# A Disjunkt forening.

**Sætning A.1** *Lad* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ *være en familie af topologiske rum. Da findes et topologisk rum* $X$ *og en familie af afbildninger* $\iota_\alpha : X_\alpha \to X$ *opfyldende*

(1) *Hvert* $\iota_\alpha : X_\alpha \to X$ *er injektiv, kontinuert og åben.*
(2) $X = \bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(X_\alpha)$ .
(3) $\forall\, \alpha, \beta \in A \;:\; \alpha \neq \beta \;\Rightarrow\; \iota_\alpha(X_\alpha) \cap \iota_\beta(X_\beta) = \emptyset$ .

*Hvis* $(X, \{\iota_\alpha\}_{\alpha \in A})$ *og* $(X', \{\iota'_\alpha\}_{\alpha \in A})$ *begge har egenskaberne* (1), (2) *og* (3), *da findes netop een afbildning* $h : X \to X'$ *som gør alle diagrammerne*

$$\begin{tikzcd} & X_\alpha \arrow[dl, "\iota_\alpha"'] \arrow[dr, "\iota'_\alpha"] & \\ X \arrow[rr, "h"'] & & X' \end{tikzcd}$$

*kommutative. Denne* $h$ *er endda en homeomorfi.*

**Bemærkning A.2** Det optil homeomorfi entydigt bestemte rum $X$ i sætningen, kaldes den disjunkte forening (eller den topologiske sum) af familien $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ og betegnes $\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$. Inden beviset for sætningen et lille

**Lemma A.3** *Hvis* $X$ *og* $\iota_\alpha : X_\alpha \to X$ *har egenskaberne* (1), (2) *og* (3) *i sætningen ovenfor, da gælder*

$(a)$ $\iota_\alpha$ *er en homeomorfi af* $X_\alpha$ *på sit billede* $\iota_\alpha(X_\alpha)$.
$(b)$ $\iota_\alpha(X_\alpha)$ *er både åben og afsluttet i* $X$.
$(c)$ *Hvis* $E$ *er en sammenhængende delmængde af* $X$, *da findes* $\alpha \in A$ *så* $E \subseteq \iota_\alpha(X_\alpha)$.
$(d)$ *For* $E \subseteq X$ *gælder, at* $E$ *er åben i* $X$ *netop hvis* $\iota_\alpha^{-1}(E)$ *er åben i* $X_\alpha$ *for alle* $\alpha \in A$.
$(e)$ *For topologisk rum* $Y$ *og afbildning* $f : X \to Y$ *gælder, at* $f$ *er kontinuert netop hvis alle* $f \circ \iota_\alpha : X_\alpha \to Y$ *er kontinuerte.*

**Bevis for lemma A.3.** $(a)$ En direkte konsekvens af (1).
$(b)$ Da $\iota_\alpha$ er åben er $\iota_\alpha(X_\alpha)$ åben i $X$. Ifølge (2) og (3) er $\iota_\alpha(X_\alpha)$ komplementet til den åbne mængde $\bigcup_{\beta \neq \alpha} \iota_\beta(X_\beta)$, og dermed afsluttet.
$(c)$ Antag $E \nsubseteq \iota_\alpha(X_\alpha)$ for alle $\alpha \in A$. Da må findes $\alpha \neq \beta$ i $A$ så $E_1 = E \cap \iota_\alpha(X_\alpha) \neq \emptyset$ og $E_2 = E \cap \iota_\beta(X_\beta) \neq \emptyset$. Pga. af $(b)$ er nu $E_1$ (og $E_2$) en åben og afsluttet delmængde af $E$ med $E_1 \neq \emptyset$ og $E_1 \neq E$. Altså er $E$ ikke sammenhængende.
$(d)$ Hvis $E$ åben i $X$ er selvfølgelig $\iota_\alpha^{-1}(E)$ åben i $X_\alpha$. Det omvendte følger af identiteten $E = \bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\iota_\alpha^{-1}(E))$, og af at $\iota_\alpha$ er åben.
$(e)$ Hvis $f$ er kontinuert er selvfølgelig også $f \circ \iota_\alpha$ kontinuert. Antag omvendt at alle $f \circ \iota_\alpha$ er kontinuerte og lad $U$ være en åben delmængde af $Y$. Ifølge det lige viste er $f^{-1}(U)$ åben i $X$, idet $\iota_\alpha^{-1}(f^{-1}(U)) \;=\; (f \circ \iota_\alpha)^{-1}(U)$ er åben i $X_\alpha$ for alle $\alpha \in A$. □

**Bevis for sætning A.1.** For eksistens betagtes den disjunkte forening $X = \bigcup_{\alpha \in A}(X_\alpha \times \{\alpha\})$. Med $\mathcal{G}$ betegner vi systemet af delmængder af $X$, som kan skrives på formen $\bigcup_{\alpha \in A}(V_\alpha \times \{\alpha\})$

hvor $V_\alpha$ er åben i $X_\alpha$. Det ses umiddelbart at være en topologi på $X$. Idet vi lader $\iota_\alpha : X_\alpha \to X$ være afbildningen $\iota_\alpha(x) = (x, \alpha)$ for $x \in X_\alpha$, er det let at se hvorfor (1), (2) og (3) er opfyldt. For entydighed bemærkes straks, at *hvis* $h : X \to X'$ er en afbildning der giver kommutativitet af alle

$$\begin{tikzcd} & X_\alpha \arrow[dl, "\iota_\alpha"'] \arrow[dr, "\iota'_\alpha"] & \\ X \arrow[rr, "h"'] & & X' \end{tikzcd}$$

*da* vil $h$ være entydigt bestemt ved formlen $h(y) = \iota'_\alpha(x)$, når $x \in X_\alpha$ med $\iota_\alpha(x) = y$ $(y \in X)$. At dette rent faktisk også giver en afbildning skyldes, at der til hvert $y \in X$ findes netop et $\alpha \in A$ og netop et $x \in X_\alpha$ med $\iota_\alpha(x) = y$. Det er helt trivielt, at $h$ er bijektiv, og da $h \circ \iota_\alpha = \iota'_\alpha$ og $h^{-1} \circ \iota'_\alpha = \iota_\alpha$ er kontinuerte for alle $\alpha \in A$, giver lemmaet, at både $h$ og $h^{-1}$ er kontinuerte. Dette viser sætningen. □

**Definition A.4** Givet topologiske rum $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ og $Y$, samt afbildninger $f_\alpha : X_\alpha \to Y$. Idet der til hvert $x \in \bigvee X_\alpha$ findes netop et $\beta \in A$ og netop et $x_\beta \in X_\beta$ så $x = \iota_\beta(x_\beta)$, kan vi veldefinere en afbildning $\bigvee f_\alpha : \bigvee X_\alpha \to Y$ ved $(\bigvee f_\alpha)(x) = f_\beta(x_\beta)$, når ovenstående er opfyldt.

**Lemma A.5** *Givet topologiske rum* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ *og* $Y$*, samt afbildninger* $f_\alpha : X_\alpha \to Y$*. Da gælder*

$$\bigvee f_\alpha \textit{ kontinuert} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{alle } f_\alpha \textit{ er kontinuerte.}$$

**Bevis.** Følger af lemmaet, idet jo $(\bigvee f_\alpha) \circ \iota_\beta = f_\beta$. □

# B Totalt usammenhængende rum.

**Definition B.1** For topologisk rum $Y$ og $y \in Y$, lader vi $[y]_Y$ betegne sammenhængskomponenten i $Y$ indeholdende $y$. Vi kalder $Y$ for totalt usammenhængende såfremt $[y]_Y = \{y\}$ for alle $y \in Y$.

**Bemærkning B.2** Lad $Y$ være et topologisk rum og $E$ et delrum af $Y$. For $D \subseteq E$ indser man let, at

$$D \text{ sammenhængende i } E \;\Leftrightarrow\; D \text{ sammenhængende i } Y.$$

For $y \in E$ er derfor $[y]_E \subseteq [y]_Y$, opfattet som delmængder af $Y$. En sammenhængende delmængde af $Y$ behøver dog ikke at være indeholdt i $E$, og man kan derfor ikke forvente $[y]_E = [y]_Y$ i almindelighed.
Derimod giver punkt $(c)$ i lemmaet, at når $y = (x_\alpha, \alpha) \in X = \bigvee X_\alpha$, hvor $x_\alpha \in X_\alpha$, da vil rent faktisk $[y]_X = [y]_{\iota_\alpha(X_\alpha)}$.

**Eksempel B.3** De sammenhængende delmængder af $\mathbb{R}$ er præcis intervallerne, der alle (pånær $\emptyset$ og singleton's) har Lebesguemål $> 0$. Det er derfor klart, at enhver $m$-nulmængde i $\mathbb{R}$ er totalt usammenhængende. Det omvendte gælder ikke, idet $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ er totalt usammenhængende med $m(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \infty$.

**Sætning B.4** *Givet topologiske rum $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ og $Y$, samt et delrum $E$ af $Y$. Vi betragter egenskaberne*

$$(M)\ \textit{Metriserbart} \quad , \quad (K)\ \textit{Kompakt} \quad , \quad (T)\ \textit{Totalt usammenhængende.}$$

*Da gælder*

(1) *Antag alle $X_\alpha$ og $Y$ er $(M)$. Da er $E$ og $\bigvee X_\alpha$ også $(M)$, og hvis yderligere $A$ er tællelig, da er $\prod X_\alpha$ også $(M)$.*
(2) *Antag alle $X_\alpha$ og $Y$ er $(K)$. Da er $\prod X_\alpha$ også $(K)$. Hvis ydeligere $E$ er afsluttet og $A$ er endelig, da er $E$ og $\bigvee X_\alpha$ også $(K)$.*
(3) *Antag alle $X_\alpha$ og $Y$ er $(T)$. Da er $E$, $\prod X_\alpha$ og $\bigvee X_\alpha$ alle $(T)$.*

**Bevis.** (1) Kun påstanden om $X = \bigvee X_\alpha$ er værd at bemærke. Lad $\mathcal{G}$ være topologien på $X$, og lad $d_\alpha$ være metrikken på $X_\alpha$. Vi definerer da

$$d((x_\alpha,\alpha),(y_\beta,\beta)) = \begin{cases} 1 & \text{for } \alpha \neq \beta \\ d_\alpha(x_\alpha,y_\beta)\wedge 1 & \text{for } \alpha = \beta \end{cases}$$

for $(x_\alpha,\alpha)$, $(y_\beta,\beta) \in X$. Det er klart, at $d$ virkelig er en metrik på $X$. Afbildningen $\iota_\alpha : (X_\alpha,d_\alpha) \to (X,d)$ er kontinuert og åben, idet den er sammensat af

$$(X_\alpha,d_\alpha) \xrightarrow{\mathrm{id}_{X_\alpha}} (X_\alpha,d_\alpha\wedge 1) \xrightarrow{\iota_\alpha} (X,d)$$

Her er første afbildning en homeomorfi, idet $d_\alpha$ og $d_\alpha \wedge 1$ er ækvivalente metrikker på $X_\alpha$, medens anden afbildning er en isometri, og derfor kontinuert og åben.
Entydighedsudsagnet om $(X,\mathcal{G})$ giver herefter, at $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{G}) \to (X,d)$ er en homeomorfi, og dermed $\mathcal{G} = \tau$, som ønsket.
(2) Kun påstanden om $X := \bigvee X_\alpha$ er værd at bemærke. Da $X_\alpha$ er kompakt, vil også $\iota_\alpha(X_\alpha)$ være kompakt. Hvis $A$ er endelig, er $X$ en endelig forening af kompakte mængder, og dermed selv kompakt.
(3) For $y \in E$ er $[y]_E \subseteq [y]_Y = \{y\}$, hvilket viser, at $E$ er (T).
Herefter vises påstanden for $P = \prod X_\alpha$. Lad $\pi_\alpha : P \to X_\alpha$ være den $\alpha^{te}$ projektion. Givet $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in P$, da er $[x]_P$ sammenhængende i $P$, og dermed $\pi_\alpha([x]_P)$ sammenhængende i $X_\alpha$. Fordi $x_\alpha \in \pi_\alpha([x]_P)$ og $X_\alpha$ er (T) konkluderes $\pi_\alpha([x]_P) = \{x_\alpha\}$. Altså vil $[x]_P = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A}\} = \{x\}$, som ønsket.
Endelig betragtes rummet $X = \bigvee X_\alpha$. Lad der være givet $y = (x_\alpha,\alpha) \in X$, hvor $x_\alpha \in X_\alpha$. Da $\iota_\alpha(X_\alpha)$ er (T), idet det jo er homeomorft med $X_\alpha$, finder vi $[y]_X = [y]_{\iota_\alpha(X_\alpha)} = \{y\}$, som ønsket. □

# C Den projektive limes.

Vi skal indføre den projektive limes af topologiske rum og af abelske grupper. Dette kan gøres i en mere generel ramme, men til vores formål er nedenstående rigeligt. Der gælder følgende eksistens- og entydighedssætning

**Sætning C.1** *Givet en følge af kompakte metriske rum (abelske grupper) og kontinuerte afbildninger (gruppehomomorfier)*

$$A_\bullet = \cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} A_0$$

**Eksistens.** *Der findes et kompakt metrisk rum (abelsk gruppe) $A$ og en følge af kontinuerte afbildninger (gruppehomomorfier) $p_n : A \to A_n$, som giver kommutativitet af hver af diagrammerne* $(n \geq 1)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "p_n"'] \arrow[drr, "p_{n-1}"] & & \\ & A_n \arrow[r, "f_n"'] & A_{n-1} \end{tikzcd}$$

*Endvidere gælder den universelle egenskab, at hvis $B$ er et andet kompakt metrisk rum (abelsk gruppe) udstyret med kontinuerte afbildninger (gruppehomomorfier) $q_n : B \to A_n$, som giver kommutativitet af alle diagrammerne*

$$\begin{tikzcd} & A_n \arrow[r, "f_n"] & A_{n-1} \\ B \arrow[ur, "q_n"] \arrow[urr, "q_{n-1}"'] & & \end{tikzcd}$$

*da findes netop een kontinuert afbildning (gruppehomomorfi) $\varphi : B \to A$, som gør alle diagrammerne*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "p_n"] & \\ & A_n \\ B \arrow[uu, "\varphi"] \arrow[ur, "q_n"'] & \end{tikzcd}$$

*kommutative.*

**Entydighed.** *Hvis $(A, \{p_n\})$ og $(A', \{p'_n\})$ begge opfylder kravene i eksistensdelen, da findes (netop) en homeomorfi (gruppeisomorfi) $\varphi : A' \to A$, opfyldende $p'_n = p_n\varphi$ for alle $n \geq 0$.*

**Bevis.** Entydighedsbeviset er ganske ligetil. For eksistens sættes

$$A = \{(a_n)_{n\geq 0} \in \prod_{n\geq 0} A_n \mid \forall\, n \geq 1 \; : \; f_n(a_n) = a_{n-1}\}$$

Når alle $A_n$ er kompakte metriske rum (abelske grupper), er $\prod_{n\geq 0} A_n$ også kompakt og metrisk (en abelsk gruppe). Man ser let, at $A$ faktisk er en afsluttet delmængde (en undergruppe) af $\prod_{n\geq 0} A_n$, og derfor selv kompakt og metrisk (en abelsk gruppe). Projektionerne $\pi_m : \prod_{n\geq 0} A_n \to A_m$ er kontinuerte (gruppehomomorfier), og vi lader nu $p_n$ være restriktionen af $\pi_n$ til $A$. Det er ikke svært at se, at vi med disse valg af $A$ og $p_n$ får det ønskede.

Bemærk dog følgende vigtige detalje : I tilfældet hvor $A_\bullet$ er en følge af abelske grupper, da bliver $A \neq \emptyset$, idet jo $A$ indeholder det neutrale element. I tilfældet hvor $A_\bullet$ er en følge af kompakte metriske rum, bliver vi nødt til at give et særligt argument for at sikre $A \neq \emptyset$. Beviset er derfor afsluttet modulo følgende sætning. □

**Sætning C.2** *Hvis* $A_\bullet = \cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} A_0$ *er en følge af kompakte metriske rum og kontinuerte afbildninger, da er*

$$A = \{(a_n)_{n\geq 0} \in \prod_{n\geq 0} A_n \mid \forall\, n \geq 1 \; : \; f_n(a_n) = a_{n-1}\}$$

*en ikke-tom mængde.*

**Bevis.** For $n \geq 1$ defineres

$$Y_n = \{(a_j)_{j\geq 0} \in \prod_{j\geq 0} A_j \mid \forall 1 \leq j \leq n \ : \ f_j(a_j) = a_{j-1}\}$$

Det er klart, at $Y_n \neq \emptyset$ og at $\bigcap_{n\geq 0} Y_n = A$. Da $\prod_{j\geq 0} A_j$ er kompakt, følger det ønskede, såfremt vi kan vise

(1) Hvert $Y_n$ er afsluttet.
(2) Hvis $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ , da er $Y_{n_1} \cap \ldots \cap Y_{n_k} \neq \emptyset$.

**Ad (1).** Vi viser at $(\prod_{j\geq 0} A_j) \setminus Y_n$ er åben. Givet $q = (q_j)_{j\geq 0} \in (\prod_{j\geq 0} A_j) \setminus Y_n$. Eftersom $q \notin Y_n$ findes $1 \leq i \leq n$ så $f_i(q_i) \neq q_{i-1}$. Da $A_{i-1}$ er Hausdorff, findes åbne delmængder $U_{i-1}, V_{i-1} \subseteq A_{i-1}$ med $q_{i-1} \in U_{i-1}$, $f_i(q_i) \in V_{i-1}$ og $U_{i-1} \cap V_{i-1} = \emptyset$. Nu er $V_i = f_i^{-1}(V_{i-1})$ en åben delmængde af $A_i$ med $q_i \in V_i$. Idet vi sætter

$$U_q \;=\; A_0 \times \cdots \times A_{i-2} \times U_{i-1} \times V_i \times A_{i+1} \times A_{i+2} \times \cdots ,$$

er $U_q$ åben i $\prod_{j\geq 0} A_j$ med $q \in U_q$. Vi påstår $U_q \subseteq (\prod_{j\geq 0} A_j) \setminus Y_n$. Hvis $p = (p_j)_{j\geq 0} \in U_q$ vil nemlig $f_i(p_i) \neq p_{i-1}$.
**Ad (2).** Følger af at $Y_{n_1} \cap \ldots \cap Y_{n_k} = Y_m$ med $m = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. □

**Bemærkning C.3** Det (optil homeomorfi/isomorfi) entydigt bestemte objekt $A$ i sætning C.1 kaldes den projektive limes af følgen

$$A_\bullet \;=\; \cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} A_0 \ ,$$

og den betegnes $\lim A_\bullet$.

Vi skal nu gøre lim til en *funktor*. Vi betragter endnu en følge

$$B_\bullet \;=\; \cdots \longrightarrow B_n \xrightarrow{g_n} B_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} \cdots \xrightarrow{g_1} B_0$$

af kompakte metriske rum (abelske grupper). Ved en *translation* $t_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$, forstås en følge $t_\bullet = (t_n)_{n\geq 0}$ af kontinuerte afbildninger (gruppehomomorfier) $t_n : A_n \to B_n$ som gør diagrammet

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "t_n"] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "t_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "f_1"] & A_0 \arrow[d, "t_0"] \\
\cdots \arrow[r] & B_n \arrow[r, "g_n"] & B_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "g_1"] & B_0
\end{tikzcd}$$

kommutativt. Det er klart hvorledes vi kan sammensætte translationer, og vi har også den identiske translation $1_{A_\bullet} = (1_{A_n})_{n\geq 0}$. På denne måde får vi kategorier

$\mathbb{KM}_\bullet$ : Kategorien af følger af kompakte metriske rum og translationer.
$\mathbb{AG}_\bullet$ : Kategorien af følger af abelske grupper og translationer.

Hvis $p_n : \lim A_\bullet \to A_n$ og $q_n : \lim B_\bullet \to B_n$ betegner de kanoniske afbildninger, har vi den kommuterende trekant

$$\begin{tikzcd} & B_n \arrow[r, "g_n"] & B_{n-1} \\ \lim A_\bullet \arrow[ur, "t_n p_n"] \arrow[urr, "t_{n-1}p_{n-1}"'] & & \end{tikzcd}$$

Der findes derfor netop een kontinuert afbildning (gruppehomomorfi) $\varphi : \lim A_\bullet \to \lim B_\bullet$, som betegnes $\varphi = \lim t_\bullet$, der giver kommutativitet af

$$\begin{tikzcd} \lim B_\bullet \arrow[r, "q_n"] & B_n \\ \lim A_\bullet \arrow[u, "\lim t_\bullet"] \arrow[r, "p_n"] & A_n \arrow[u, "t_n"'] \end{tikzcd}$$

Dette viser, at $(\lim t_\bullet)((a_n)_{n\geq 0}) = (t_n(a_n))_{n\geq 0}$ når $(a_n)_{n\geq 0} \in \lim A_\bullet$.
Vi har set, at $t_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ anledning til $\lim t_\bullet : \lim A_\bullet \to \lim B_\bullet$, og det er nu en smal sag at vise

**Sætning C.4** lim *er en kovariant funktor, både mellem kategorierne* $\mathbb{KM}_\bullet \to \mathbb{KM}$ *og mellem kategorierne* $\mathbb{AG}_\bullet \to \mathbb{AG}$.

**Definition C.5** En translation $t_\bullet = (t_n)_{n\geq 0} : A_\bullet \to B_\bullet$ i $\mathbb{KM}_\bullet$ (resp. $\mathbb{AG}_\bullet$) kaldes injektiv, surjektiv eller isomorfi såfremt alle $t_n$ er resp. injektive, surjektive eller homeomorfier (resp. gruppeisomorfier). Følgen

$$A_\bullet \xrightarrow{t_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{u_\bullet} C_\bullet$$

kaldes kortexakt såfremt alle $A_n \xrightarrow{t_n} B_n \xrightarrow{u_n} C_n$ er kortexakte.

**Sætning C.6** *Funktoren* $\lim : \mathbb{AG}_\bullet \to \mathbb{AG}$ *er venstreexakt, dvs. hvis*

$$A_\bullet \xrightarrow{t_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{u_\bullet} C_\bullet$$

*er kortexakt i* $\mathbb{AG}_\bullet$*, da er* $\lim t_\bullet$ *injektiv og* $\mathrm{Im}(\lim t_\bullet) = \mathrm{Ker}(\lim u_\bullet)$.

**Bevis.** Ren rutine. □

**Bemærkning C.7** I almindelighed vil ovenstående forudsætninger ikke sikre surjektivitet af $\lim u_\bullet$, og det er let at finde eksempler på dette. Lidt overraskende gælder derimod

**Lemma C.8** *Lad* $t_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ *være en translation i* $\mathbb{KM}_\bullet$. *Da gælder*

$$\begin{array}{ccc} t_\bullet \textit{ injektiv} & \Rightarrow & \lim t_\bullet \textit{ injektiv.} \\ t_\bullet \textit{ surjektiv} & \Rightarrow & \lim t_\bullet \textit{ surjektiv.} \end{array}$$

**Bevis.** Vi skriver $f_n : A_n \to A_{n-1}$ og $g_n : B_n \to B_{n-1}$. Første påstand følger af, at $(\lim t_\bullet)(a) = (t_n(a_n))_{n\geq 0}$ for $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \lim A_\bullet$. Tilbage er påstanden om surjektivitet.

Givet $b = (b_n)_{n\geq 0} \in \lim B_\bullet$. For hvert $n \geq 0$ sættes $A'_n = t_n^{-1}(\{b_n\})$, der er en ikke-tom afsluttet delmængde af $A_n$. Bemærk at $f_n(A'_n) \subseteq A'_{n-1}$, idet der for $a'_n \in A'_n$ gælder

$$t_{n-1}(f_n(a'_n)) = g_n(t_n(a'_n)) = g_n(b_n) = b_{n-1}.$$

Lad $f'_n : A'_n \to A'_{n-1}$ være afbildningen $f_n$, blot opfattet som afbildning af $A'_n$ ind i $A'_{n-1}$. Betragt følgen

$$A'_\bullet \;=\; \cdots \longrightarrow A'_n \xrightarrow{f'_n} A'_{n-1} \xrightarrow{f'_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f'_1} A'_0$$

i $\mathbb{KM}_\bullet$. Vi har nu $\lim A'_\bullet \subseteq \lim A_\bullet$, og sætning C.2 giver $\lim A'_\bullet \neq \emptyset$. Et vilkårligt element i $a' \in \lim A'_\bullet$ vil åbenlyst opfylde $(\lim t_\bullet)(a') = b$. □

Surjektivitetsbeviset ovenfor fungerer ikke kategorien $\mathbb{AG}_\bullet$, idet $A'_n = t_n^{-1}(\{b_n\})$ ikke nødvendigvis er en undergruppe af $A_n$.

**Lemma C.9** *Lad $t_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ være en injektiv translation i $\mathbb{KM}_\bullet$ eller $\mathbb{AG}_\bullet$. For $b = (b_n)_{n\geq 0} \in \lim B_\bullet$ gælder da*

$$b \in \mathrm{Im}(\lim t_\bullet) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, n \geq 0 \;:\; b_n \in \mathrm{Im}(t_n).$$

**Bevis.** Implikationen $\Rightarrow$ er klar. Antag omvendt at der til hvert $n \geq 0$ findes $a_n \in A_n$ med $b_n = t_n(a_n)$. Hvis vi kan vise $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \lim A_\bullet$, er vi færdige. Idet vi skriver $f_n : A_n \to A_{n-1}$ og $g_n : B_n \to B_{n-1}$ finder vi

$$t_{n-1}(f_n(a_n)) \;=\; g_n(t_n(a_n)) \;=\; g_n(b_n) \;=\; b_{n-1} \;=\; t_{n-1}(a_{n-1}),$$

og injektiviteten af $t_\bullet$ giver derfor $f_n(a_n) = a_{n-1}$. Dette viser det ønskede. □

**Sætning C.10** *Funktoren* $\lim : \mathbb{KM}_\bullet \to \mathbb{KM}$ *er exakt, dvs. hvis*

$$A_\bullet \xrightarrow{t_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{u_\bullet} C_\bullet$$

*er kortexakt i $\mathbb{KM}_\bullet$, da er* $\lim A_\bullet \xrightarrow{\lim t_\bullet} \lim B_\bullet \xrightarrow{\lim u_\bullet} \lim C_\bullet$ *kortexakt i $\mathbb{KM}$. Specielt er* $(\lim B_\bullet)/\mathrm{Im}(\lim t_\bullet)$ *homeomorf med* $\lim C_\bullet$*, og derfor med en afsluttet delmængde af* $\prod_{n\geq 0} C_n$.

**Bevis.** Vi kan antage $C_n = B_n/\mathrm{Im}(t_n)$ og at $u_n = \kappa_n$ er kvotientafbildningen. Idet vi sætter $\kappa_\bullet = (\kappa_n)_{n\geq 0}$, og idet $\pi : \lim B_\bullet \to (\lim B_\bullet)/\mathrm{Im}(\lim t_\bullet)$ betegner kvotientafbildningen, skal vi altså godtgøre

(1) $\lim t_\bullet$ er injektiv.
(2) $\lim \kappa_\bullet$ er surjektiv.
(3) $(\lim \kappa_\bullet)\,(\lim t_\bullet)$ er konstant.
(4) $\pi(b') = \pi(b'')$ når $b', b'' \in \lim B_\bullet$ med $(\lim \kappa_\bullet)(b') = (\lim \kappa_\bullet)(b'')$.

Her følger (1) og (2) direkte af lemma C.8. Da hver afbildning $\kappa_n t_n$ er konstant, følger (3). Tilbage er at vise (4) :

Skriv $b' = (b'_n)_{n\geq 0}$ og $b'' = (b''_n)_{n\geq 0}$. Antagelsen $(\lim \kappa_\bullet)(b') = (\lim \kappa_\bullet)(b'')$ betyder, at $\kappa_n(b'_n) = \kappa_n(b''_n)$ for alle $n \geq 0$. Vi har derfor

$$\forall\, n \geq 0 \;:\; (\, b'_n \neq b''_n \;\Rightarrow\; b'_n, b''_n \in \mathrm{Im}(t_n)\,). \tag{13}$$

Vi ønsker at vise $\pi(b') = \pi(b'')$, dvs. vise

$$b' \neq b'' \;\Rightarrow\; b', b'' \in \mathrm{Im}(\lim t_\bullet). \tag{14}$$

Vi bemærker (overvej!), at der for $N \geq 0$ gælder

$(i)$ Hvis $b'_N, b''_N \in \mathrm{Im}(t_N)$, da vil også $b'_n, b''_n \in \mathrm{Im}(t_n)$ for alle $n \leq N$.
$(ii)$ Hvis $b'_N = b''_N$, da vil også $b'_n = b''_n$ for alle $n \leq N$.

Vi kan nu vise (14) som følger : Antag $b' \neq b''$. Da findes $N \geq 0$ så $b'_N \neq b''_N$, og (13) giver derfor $b'_N, b''_N \in \mathrm{Im}(t_N)$. Ifølge $(i)$ vil derfor også $b'_n, b''_n \in \mathrm{Im}(t_n)$ for $n \leq N$. Der må også gælde $b'_m, b''_m \in \mathrm{Im}(t_m)$ for $m > N$. I modsat fald findes nemlig $m_0 > N$ så f.eks. $b'_{m_0} \notin \mathrm{Im}(t_{m_0})$, hvorefter (13) giver $b'_{m_0} = b''_{m_0}$, hvilket strider mod $(ii)$ og $b'_N \neq b''_N$. Vi konkluderer $b'_n, b''_n \in \mathrm{Im}(t_n)$ for alle $n \geq 0$, hvorefter lemma C.9 giver $b', b'' \in \mathrm{Im}(\lim t_\bullet)$, som ønsket. $\square$

Vi slutter af med at nævne

**Lemma C.11** *Lad* $A_\bullet = \cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} A_0$ *være en følge i* $\mathbb{KM}_\bullet$ *eller* $\mathbb{AG}_\bullet$. *Idet* $p_n : \lim A_\bullet \to A_n$ *betegner de kanoniske afbildninger, gælder*

$$\forall\, n \geq 1 \ : \ f_n \ \textit{surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, n \geq 0 \ : \ p_n \ \textit{surjektiv}$$

**Bevis.** Implikationen mod venstre er triviel fordi $f_n \circ p_n = p_{n-1}$ for alle $n \geq 1$. Antag omvendt at alle $f_n$ er surjektive, og lad $a_m \in A_m$ være givet. Find rekursivt $a_i \in A_i$ så $f_i(a_i) = a_{i-1}$, $i = m+1, m+2, \ldots$ . Hvis $m > 0$ sættes endvidere

$$a_{m-1} = f_m(a_m) \ , \ a_{m-2} = f_{m-1}(a_{m-1}) \ , \ \ldots \ , a_0 = f_1(a_1) \ .$$

Dermed bliver $a = (a_n)_{n \geq 0}$ element i $\lim A_\bullet$ opfyldende $p_m(a) = a_m$, hvilket viser surjektiviteten af $p_m$. $\square$

# Litteratur

[1] L. G. Brown, R. Douglas, and P. Fillmore, *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras*, Proceedings of a conference on operator theory, Halifax, Nova Scotia (Berlin-Heidelberg-New York), Lecture notes in Math., vol. 345, Springer-Verlag, 1973, pp. 58–128.

[2] ______, *Extensions of C*-algebras and K-homology*, Ann. of Math. **105** (1977), 265–324.

[3] J. Cuntz, *Simple C*-algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (1977), 173–185.

[4] K. R. Davidson, *C*-algebras by Example*, Fields Institute Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1996.

[5] John G. Hocking and Gail S. Young, *Topology*, Dover Publications, Inc., New York, 1988.

[6] G. J. Murphy, *C*-algebras and operator theory*, Academic Press, London, 1990.