

練習問題その3

問題 1. あるベクトル空間 V のベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ において、次のベクトルに対して、自明でない 1 次関係を求めよ。(1 次関係とは、零ベクトルと等しい 1 次結合である。)

(i) \mathbf{u}, \mathbf{u}

(ii) $\mathbf{0}, \mathbf{u}$

(iii) $\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v}$

問題 2. ベクトル空間 V と 1 次独立である部分集合 $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \subset V$ をおいておく。次のように定義された部分集合 $S' \subset V$ は 1 次独立でもあることを示せ。

$$S' = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w} + \mathbf{u}\}$$

問題 3. ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 に関して、次のように定義された部分空間 $W \subset \mathbb{R}^3$ の基底を求めよ。

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 = x_3 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

問題 4. 有限次元のベクトル空間 V とその部分空間をおいておく。次の命題を示せ。

(i) $\dim(W) \leq \dim(V)$ である。

(ii) $\dim(W) = \dim(V)$ なら、 $W = V$ である。