

練習問題その6

問題 1. $R = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ を、基本基底、 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ を、次のベクトルからなる基底とする。

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(i) 恒等写像 $\text{id}_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の基底 $S \subset \mathbb{R}^2$ と $R \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列を求めよ。

(ii) 恒等写像 $\text{id}_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の基底 $R \subset \mathbb{R}^2$ と $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列を求めよ。

問題 2. $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を、次の線形写像とする。

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

$R \subset \mathbb{R}^3, S \subset \mathbb{R}^2$ を、基本基底、 $R' \subset \mathbb{R}^3, S' \subset \mathbb{R}^2$ を、次の基底とする。

$$R' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

(i) F の基底 $R \subset \mathbb{R}^3$ と $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 A 、 $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ の基底 $R' \subset \mathbb{R}^3$ と $R \subset \mathbb{R}^3$ に関する表現行列 P 、 $\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ の基底 $S' \subset \mathbb{R}^2$ と $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 Q を求めよ。

(ii) 注 4 におけるような図式を書け。

(iii) F の基底 $R' \subset \mathbb{R}^3$ と $S' \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 B を求めよ。

問題 3. $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を、次の線形写像とする。

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$S \subset \mathbb{R}^3$ を、基本基底、 $S' \subset \mathbb{R}^3$ を、以下の基底とする。

$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(i) F の基底 $S \subset \mathbb{R}^3$ と $S \subset \mathbb{R}^3$ に関する表現行列 A 、 $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ の基底 $S' \subset \mathbb{R}^3$ と $S \subset \mathbb{R}^3$ に関する表現行列 P を求めよ。

(ii) 注 4 におけるような図式を書け。

(iii) F の基底 $S' \subset \mathbb{R}^3$ と $S' \subset \mathbb{R}^3$ に関する表現行列 B を求めよ。

問題 4. $\mathbb{R}[x]_4$ を、実数係数たかだか 4 次の多項式からなるベクトル空間、 $S \subset \mathbb{R}[x]_4$ を、次の基底とする。

$$S = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$$

$F: \mathbb{R}[x]_4 \rightarrow \mathbb{R}[x]_4$ を、次のように定義された線形写像とする。

$$F(f(x)) = f(x+1)$$

F の基底 $S \subset \mathbb{R}[x]_4$ と $S \subset \mathbb{R}[x]_4$ に関する表現行列 A を求めよ。