

練習問題その 7

問題 1. $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を次のように定める線形写像とする。

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) F の退化次数と階数を求めよ。
- (ii) $\ker(F)$ の基底 R 、 $\operatorname{im}(F)$ の基底 S を求めよ。

問題 2. $F: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を次のように定める線形写像とする。

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) F の退化次数と階数を求めよ。
- (ii) $\ker(F)$ の基底 R 、 $\operatorname{im}(F)$ の基底 S を求めよ。

問題 3. 線形写像 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して、次の命題は同値であることを示す。

- (i) F は、全射である。
- (ii) F は、単射である。
- (iii) F は、全単射である。