

## 練習問題その9

**問題 1.**  $V$  を有限次元ベクトル空間、 $F: V \rightarrow V$  を線形写像とする。合成写像

$$F^k = F \circ \cdots \circ F: V \rightarrow V \quad (k \text{ 個の } F)$$

がゼロ写像となるような  $k \geq 1$  が存在するとき、次の各問いに答えよ。

(i)  $F$  の固有値に対して、 $\lambda = 0$  しかないことを示せ。(ヒント：固有値の定義を使え)

(ii)  $\lambda \neq 0$  に対して、 $F - \lambda \text{id}_V: V \rightarrow V$  は全単射であることを示せ。

**問題 2.**  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を次のように定める線形写像とする。

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

次の各問いに答えよ。

(i)  $F$  の固有多項式  $\chi_F(t)$  を求めろ。

(ii)  $F$  の各固有値を求めよ。

(iii)  $F$  の各固有空間の基底を求めよ。

**問題 3.** 実数  $a \in \mathbb{R}$  に関して、 $F_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を次のように定める線形写像とする。

$$F_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

次の各問いに答えよ。

(i)  $F_a$  の固有多項式を求めよ。

(ii)  $F_a$  の各固有値を求めよ。

(iii)  $F_a$  の各固有空間の基底を求めよ。

(iv)  $\mathbb{R}^3$  が  $F_a$  の固有ベクトルからなる基底を持つかどうかは調べよ。